Análise Infinitesimal II
DESENVOLVIMENTOS DE TAYLOR E FOURIER

9-1. Desenvolva as seguintes funções em séries de potências de x, no maior intervalo aberto possível:

a) $\dfrac{1}{1+x^2}$ b) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

c) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ d) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

e) e^{1-x} f) $\sin^2 x$

9-2. Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-3$. Indique o maior domínio onde o desenvolvimento é válido.

9-3. Ache os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções na origem, indicando os respectivos domínios de validade.

a) $\arcsin x$ b) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

9-4. Considerem-se as seguintes séries de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{2n+1}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} \quad \text{e} \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n}}.$$

a) Determine o intervalo de convergência das séries anteriores.
b) Calcule $f'(1/4)$ e $h'(1)$.
c) Determine a função $g(x)$.

9-5. Demonstre que as seguintes igualdades são válidas para $|x| < 1$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

9-6. Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Obtenha um desenvolvimento de Taylor na origem da primitiva $F(x)$ da função f que satisfaz a condição $\lim_{x\to 1} F(x) = 2$.

9-7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. Sabendo que $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ [1], determine $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ e $f'(2\pi)$.

9-8. Seja $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

a) Mostre que f admite derivada de todas as ordens em $\mathbb{R}$.

[1] veja o exercício **9-14**

b) Mostre que $f^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \geq 1$. O que pode dizer quanto à analiticidade de f?

9-9. Calcule os seguintes limites, usando um desenvolvimento de Taylor apropriado.

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right)$

e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\log(\frac{1+x}{1-x}) - 2x}$

9-10. Encontre um polinómio de Taylor $P_n(x)$ para a função $\cos\sqrt{x}$ em $x = 0$ tal que

$$\left|\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx - \int_0^1 P_n(x)\, dx\right| < 10^{-3} .$$

Estime o valor do integral $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$ com erro inferior a 10^{-3}.

9-11. Desenvolva em série de Fourier as seguintes funções.

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

c) $h(x) = x^2 \quad -\pi \leq x \leq \pi$

d) $j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

e) $k(x) = e^x \quad -\pi \leq x \leq \pi$

f) $m(x) = \cos(\gamma\, x) \quad -\pi \leq x \leq \pi,\ \gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

9-12. Escreva os desenvolvimentos de Fourier, bem como as fórmulas para os respectivos coeficientes, nos intervalos e para os períodos dados:

a) desenvolvimentos no intervalo $[-L, L]$ de funções com período $2\,L$,

b) desenvolvimentos no intervalo $[0, T]$ de funções com período T.

9-13. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $2\,L$, definida por $f(x) = |x|$, se $x \in [-L, L]$.

a) Desenvolva f em série de Fourier no intervalo $[-L, L]$

b) Use o desenvolvimento da alínea anterior para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

9-14. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período 1, definida por $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, se $x \in [0, 1]$.

a) Desenvolva f em série de Fourier no intervalo $[0, 1]$

b) Use o desenvolvimento da alínea anterior para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$