Análise Infinitesimal II
INTEGRAIS IMPRÓPRIOS

8-1. Estude, quanto à convergência, os seguintes integrais impróprios

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha > 0)$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha > 0)$

d) $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{1}{x^{1/3}-10}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+25}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-6x}|\sin x|\,dx$

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\,dx$

l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^3+2x}{x^6+4x^2+x}\,dx$

8-2. Dê um exemplo de uma sucessão $\{u_n\}$ de funções integráveis em $\mathbb{R}$ onde

$$\int_{-\infty}^\infty u_n(x)\,dx = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e $u_n(x) \to 0$ uniformemente em $\mathbb{R}$.

8-3. Considere o seguinte integral onde $A > 0$

$$\int_2^\infty \left(\frac{Ax}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx$$

Determine todos os valores de A para os quais o integral acima indicado converge.

8-4. Discuta a natureza dos seguintes integrais, fazendo a distinção entre convergência simples e absoluta sempre que seja relevante.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x\ \cos^2\sqrt{x}}{x^3}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x+5}{x^3+4}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{(x^2+x)\sqrt[3]{x^2+4}}{x^9+4}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \qquad (\alpha \geq 0)$

e) $\displaystyle\int_1^\infty \sin x^\alpha\,dx \qquad (\alpha \geq 0)$

8-5. Mostre que o integral

$$\int_1^\infty x\,\sin x^4\,dx$$

converge, apesar de a função integranda não ser uma função limitada quando $x \to \infty$.

8-6. Estude os seguintes integrais quanto à convergência

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log^3 x}{\sqrt{x}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{x\,\log^2 x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{2}{x}\right)dx$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-x}\cos x}{x}\,dx$

8-7. Seja $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x\,y^2}{1-y^2}}\,dy\ .$$

a) Mostre que para cada $x \geq 0$ o valor $F(x)$ está definido por um integral impróprio convergente.
b) Calcule $F(0)$.
c) Mostre que $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+x\,\sin^2 t}\;dt\ , \quad \forall\, x \geq 0$. Sugestão: efectue a mudança de variavel $y = \sin t$.

d) Calcule o perímetro da elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, onde $b > a > 0$. O resultado deve ser expresso em função de F e dos semi-eixos menor e maior, a e b respectivamente.

e) Segundo as leis de Kepler os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas em torno do Sol. Conhecendo os semi-eixos maior e menor de cada duma dessas elipses, expressos em *milhares de kilómetros* na tabela seguinte, calcule aproximadamente o respectivo perímetro orbital. Use a segunda tabela com os valores da função F.

	Semi-eixo menor	Semi-eixo maior
Mercúrio	56613.8	57854.6
Vénus	108105.	108107.
Terra	147358.	149457.
Marte	226727.	227722.
Júpiter	776764.	777679.

Tabela com os valores de $F(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + x\,y^2}{1 - y^2}}\, dy$

x	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.00	1.5708	1.5712	1.5716	1.572	1.5724	1.5728	1.5731	1.5735	1.5739	1.5743
.01	1.5747	1.5751	1.5755	1.5759	1.5763	1.5767	1.5771	1.5775	1.5778	1.5782
.02	1.5786	1.579	1.5794	1.5798	1.5802	1.5806	1.581	1.5813	1.5817	1.5821
.03	1.5825	1.5829	1.5833	1.5837	1.5841	1.5845	1.5848	1.5852	1.5856	1.586
.04	1.5864	1.5868	1.5872	1.5875	1.5879	1.5883	1.5887	1.5891	1.5895	1.5899
.05	1.5903	1.5906	1.591	1.5914	1.5918	1.5922	1.5926	1.5929	1.5933	1.5937
.06	1.5941	1.5945	1.5949	1.5953	1.5956	1.596	1.5964	1.5968	1.5972	1.5976
.07	1.5979	1.5983	1.5987	1.5991	1.5995	1.5998	1.6002	1.6006	1.601	1.6014
.08	1.6018	1.6021	1.6025	1.6029	1.6033	1.6037	1.604	1.6044	1.6048	1.6052
.09	1.6056	1.6059	1.6063	1.6067	1.6071	1.6075	1.6078	1.6082	1.6086	1.609

8-8. Considere a *função Gama*, $\Gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \; .$$

a) Mostre que para cada $x \geq 0$, o valor $\Gamma(x)$ está definido por um integral impróprio convergente.

b) Prove que para cada $x \geq 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Sugestão: integrando por partes relacione os integrais $\int_0^\infty e^{-t}\, t^x\, dt$ e $\int_0^\infty e^{-t}\, x\, t^{x-1}\, dt$.

c) Mostre por indução que para todo o inteiro $n \geq 0$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.