Análise Infinitesimal II
INTEGRAÇÃO

7-1. Determine as somas superiores e inferiores de Darboux relativas à decomposição $P = \{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ do intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$, para cada uma das seguintes funções $f : I \to \mathbb{R}$

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = 2x + 1$.

7-2. Estime por excesso e por defeito $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$, onde $f(x)$ denota cada uma das funções definidas no exercício anterior.

7-3. Seja $f(x) = x$ onde $x \in [0, b]$ e $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[0, b] \subseteq \mathbb{R}$, em intervalos de comprimento igual.

a) Prove que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Determine as somas superiores e inferiores de Darboux.

c) Use a sua resposta à alínea anterior para determinar $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx$.

7-4. Seja $f(x) = x^2$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Usando uma partição do intervalo $[0, 1]$ em 6 intervalos de igual comprimento, estime por excesso e por defeito, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Estabeleça a igualdade $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Usando a definição de integral de Riemann, calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

7-5. Seja $f(x) = \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Prove a seguinte relação

$$\sum_{r=0}^{n} \cos(a + r\alpha) = \frac{\cos\left(\frac{2a+n\alpha}{2}\right)\,\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \ .$$

b) Usando a definição de integral de Riemann, calcule $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ onde $a, b \in \mathbb{R}$.

7-6. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} ,$$

é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ onde $a < b$.

7-7. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} ,$$

não é integrável à Riemann.

7-8. A definição de integral de Riemann em $[a, b]$ requer que a função seja limitada em $[a, b]$. Mostre que se f fôr limitada inferiormente em $[a, b]$, mas não fôr limitada superiormente, então para qualquer partição P do intervalo $[a, b]$, a correspondente soma superior de Darboux é infinita, i.e. $\overline{S}_f(P) = +\infty$.

7-9. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{4n}\right) \right] .$$

7-10. Estime por excesso e por defeito $\displaystyle\int_0^4 x \sin x \, dx$, para $0 \leq x \leq 4$.

7-11. Prove que

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1 + x^2} \, dx \leq \frac{\pi}{4} , \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

7-12. Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$. Mostre que em $[a, b]$ o integral da sua média aritmética é igual à média aritmética dos seus integrais.

7-13. Indique os valores médios das seguintes funções

a) $f(x) = \sin x$ em $[0, 2\pi]$ e $[0, \pi]$.

b) $f(x) = \arcsin x$ em $[0, 1]$.

7-14. Determine os comprimentos dos gráficos das seguintes funções

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\log x \qquad 1 \leq x \leq 5 .$

b) $f(x) = \log(\sec x) \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} .$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{3 - x^2} + \dfrac{3}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{3}x\right) \qquad 0 \leq x \leq 1 .$

7-15. Determine os comprimentos dos arcos de curva com equações paramétricas:

a) $x(t) = (\sin t)^2 \qquad y(t) = (\cos t)^2 \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} .$

b) $x(t) = t^2 \qquad y(t) = t^3 \qquad 0 \leq t \leq 1 .$

7-16. Seja $\alpha = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Exprima os seguintes integrais em termos de α.

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \log x\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}\,dx$

7-17. Considere a função $F : (0, \infty) \to R$ definida por

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$$

Exprima os seguintes integrais em termos de F.

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{at}}{t}\,dt \quad (a > 0)$ b) $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t+a}\,dt \quad (a > -1)$

c) $\displaystyle\int_1^x e^{\frac{1}{t}}\,dt \quad (a > 0)$

7-18. Prove que

$$\int_0^a \frac{\cos x^5}{x^2 + a^2}\,dx \leq \frac{\pi}{4a} \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

7-19. Prove que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \leq \frac{1}{7}\,.$$

7-20. Mostre que

$$\frac{11}{24} \;\leq\; \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\,dx \;\leq\; \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Sugestão: Use a identidade $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)/\sqrt{1-x^2}$.

7-21. Considere a função $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{(\log t)^2}\,dt$$

a) Determine o domínio de definição D da função F.
b) Calcule $F'(x)$, para $x \in D$.
c) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} F'(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1} F'(x)$.
d) Minorando convenientemente $F(x)$ determine $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x)$.

7-22. Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x t\,f(t)\,dt = x^2 + 2\,x^4\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$