Análise Infinitesimal II
CONVERGÊNCIA UNIFORME E PONTUAL

6-1. Estude, quanto à convergência pontual, as seguintes sucessões de funções $\{f_n\}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, nos domínios indicados.

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ $\quad I = [0,1]$

b) $f_n(x) = x^n$ $\quad I = [0,1]$

c) $f_n(x) = \dfrac{n}{1 + n\,x}$ $\quad I = (0, \infty)$

d) $f_n(x) = (\sin x)^n$ $\quad I = [0, \pi]$

e) $f_n(x) = e^{-n\,x}$ $\quad I = [R, \infty),\ R > 0$

f) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2\,x^2}$ $\quad I = \mathbb{R}$

g) $f_n(x) = \dfrac{x\,e^{-\frac{x}{n}}}{n}$ $\quad I = [0, \infty)$

6-2. Mostre que $f_n(x) = \sin(n\,x)$ não converge pontualmente em $\mathbb{R}$.

6-3. Considere a sucessão de funções $\{f_n\}$ definida por

$$f_n(x) = (1 - |x|)^n \quad x \in (-1, 1),\ n \in \mathbb{N}$$

Estude a sucessão acima indicada quanto à convergência pontual e uniforme no intervalo $(-1, 1)$.

6-4. Seja $\{f_n\}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(n\,x),\ \ x \in \mathbb{R}$. Estude esta sucessão quanto à convergência uniforme em $\mathbb{R}$.

6-5. Estude quanto à convergência pontual e uniforme a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^n + 1}$ no intervalo $[0, 1]$.

6-6. Considere a sucessão de funções definida por $f_n(x) = n^2\,x^n\,(1 - x)$ onde $n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$. Mostre que $f_n(x)$ converge pontualmente em $[0, 1]$, mas a convergência não é uniforme.

6-7. Prove que se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente em $[a, b]$, então $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente em $[a, b]$.

6-8. Considere a sucessão de funções definida por

$$f_n(x) = \frac{n\,x}{1 + n\,x} \qquad x \in [0, \infty).$$

a) Determine $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
b) Diga se $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente em $[0, 1]$. Justifique a sua resposta.
c) Diga se $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente em $[1, \infty)$. Justifique a sua resposta.

6-9. Prove que as seguintes séries convergem uniformemente no intervalo indicado.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin(n\,x)$ $\qquad [-R, R] \quad (0 < R < 1)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n!}$ $\qquad (-\infty, \infty)$

6-10. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n\sqrt{n+1}}$$

representa uma função contínua para todo o $x \in (-\infty, \infty)$.

6-11. Discuta a convergência uniforme e absoluta das seguintes séries de funções no domínio indicado

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\,x)}{3^n}$ $\qquad \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $\qquad \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ $\qquad [0, \infty)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)\,x)\,(1+n\,x)}$ $\qquad [a, b], \quad [0, b), \quad 0 < a < b$