Análise Infinitesimal II
FUNÇÕES CONTÍNUAS

5-1. Seja $f(x) = x^2 - x$. Determine $f(I)$ onde I é o intervalo indicado
a) $I =]-\infty, +\infty[$
b) $I =]0, 1[$

5-2. Considere a função $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$. Indique, se existirem, o supremo, o máximo, ínfimo e mínimo de $f(x)$ em cada um dos intervalos indicados.
a) $I = [0, +\infty[$
b) $I =]-1, \infty[$

5-3. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 3\,x^2 + 2$ onde $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$
a) Usando a definição de continuidade.
b) Usando sucessões.
c) Escrevendo f como uma soma de produtos de funções cuja continuidade seja fácil de verificar.

5-4. Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{para} \quad x \neq 0 \qquad \text{e} \qquad f(0) = 0.$$

Mostre que f não é contínua no ponto $x = 0$.

5-5. Seja $f(x) = x^2$. Mostre que f é contínua provando que
a) A imagem inversa de um intervalo aberto é um aberto.
b) A imagem inversa de um intervalo fechado é um fechado.
(Nota: a) e b) caracterizam f como uma função contínua.)

5-6. Indique todos os intervalos de $\mathbb{R}$ onde a função $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ é limitada.

5-7. Seja $f(x)$ uma função contínua. Prove que f é limitada em qualquer união finita de intervalos compactos mas não é necessariamente limitada numa união infinita de compactos

5-8. Mostre que no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ existe pelo menos uma raiz da equação $\cos x - 5 \sin x + x^2 = 0$.

5-9. Prove que a equação $x^3 + 5x^2 - 3x - 8 = 0$ tem pelo menos três raízes distintas no intervalo $[-6, 6]$ e localize as raízes entre inteiros consecutivos.

5-10. Mostre que a equação $x^3 + 2x + 4 = 0$ tem uma ou mais raízes em $\mathbb{R}$.

5-11. Prove que a equação $\cos x = x$ tem pelo menos uma raiz em $[-9, 9]$.

5-12. Encontre um número racional em $]\sqrt{2} - \frac{1}{10}, \sqrt{2} + \frac{1}{10}[$.
Sugestão: Considere a função $f(x) = x^2 - 2$ e determine $q \in \mathbb{Q}^+$ tal que a equação $f(x) = 0$ tenha uma raíz em $]q - \frac{1}{10}, q + \frac{1}{10}[$.

5-13. Encontre um número racional em $]\sqrt[3]{2} - \frac{1}{200}, \sqrt[3]{2} + \frac{1}{200}[$.
Sugestão: Considere a função $f(x) = x^3 - 2$ e determine $q \in \mathbb{Q}$ tal que a equação $f(x) = 0$ tenha uma raíz em $]q - \frac{1}{200}, q + \frac{1}{200}[$.

5-14. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Prove que existe pelo menos um ponto $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Interprete geometricamente o resultado.

5-15. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em $[a, b]$ tais que

$$f(a) < g(a) \quad \text{e} \quad f(b) > g(b) \qquad \text{ou} \quad f(a) > g(a) \quad \text{e} \quad f(b) < g(b)$$

Prove que existe pelo menos um ponto $c \in [a, b]$ onde os gráficos das duas funções se intersectam.

5-16. Mostre que um polinómio de grau ímpar e coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real.

5-17. Seja f uma função contínua em $[0, 4]$ tal que $f(0) = f(4)$. Mostre que existem $x, y \in [0, 4]$ tais que $|y - x| = 2$ e $f(x) = f(y)$.

5-18. Mostre, usando a definição de continuidade uniforme de uma função num conjunto $A \subset \mathbb{R}$, que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ é uniformemente contínua no intervalo $[3, +\infty[$.

5-19. Considere a função $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ $(x \neq -1)$. Mostre, pela definição, que a função f é uniformemente contínua no intervalo $[0, 4]$.

5-20. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a < b < c)$ e $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se f fôr uniformemente contínua em $[a, b]$ e em $[b, c]$, então f é uniformemente contínua em $[a, c]$.

5-21. Seja f uma função uniformemente contínua num conjunto A de $\mathbb{R}$ e $\{x_n\}$ uma sucessão de Cauchy em A. Prove que $\{f(x_n)\}$ é uma sucessão de Cauchy.

5-22. Seja $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}$, uma função uniformemente contínua. Prove que existe $\lim_{x \to c} f(x)$ para todo o ponto de acumulação c do domínio de f.

5-23. Quais das seguintes funções são uniformemente contínuas no conjunto indicado. Justifique a sua resposta.

a) $f(x) = x^5$ $\quad I = [-10, 10]$

b) $f(x) = e^{2x} \sin 3x$ $\quad I = [0, \pi]$

c) $f(x) = x^4$ $\quad I =]-8, 8[$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad I =]0, 1[$

e) $f(x) = x^3$ $\quad \mathbb{R}$

f) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ $\quad I =]0, 1]$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ $\quad I =]0, 1[$

h) $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad I =]0, 1]$

5-24. Seja f uma função contínua num intervalo I (limitado ou não limitado) de $\mathbb{R}$ e seja I^o o intervalo obtido removendo, se existirem, os extremos do intervalo I. Prove que se f for diferenciável em I^o e se f' for limitada em I^o, então f é uniformemente contínua em I.

5-25. Prove que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ é uniformemente contínua no intervalo $[a, +\infty[$, onde $a > 0$.

5-26. Seja $f(x) = \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

b) Mostre que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

5-27. Considere $f(x) = \sqrt{x}$ onde $x \geq 0$. Prove que f é uniformemente contínua no intervalo $[1, +\infty[$. É também uniformemente contínua em $[0, +\infty[$? Justifique.

5-28. Estude a continuidade uniforme em $\mathbb{R}$ das seguintes funções:

a) $f(x) = \sin^2 x$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1 + x^2)^2}$

c) $f(x) = x \sin x$