Análise Infinitesimal II
NÚMEROS COMPLEXOS

3-1. Exprima os seguintes números complexos na forma $x+iy$ onde $x, y \in \mathbb{R}$

a) $\dfrac{1}{2i-1}$ b) $\dfrac{1+i}{3-i}$

c) $(2i+1)\pi i$ d) $\dfrac{2i}{1+i}$

3-2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos

a) $1-i$ b) $\sqrt{3}+i$

c) $-1+2\,i$ d) $-5\,i$

3-3. Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Determine o valor absoluto de $z/\overline{z}$.

3-4. Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar

a) $1+i$ b) $4\,i$

c) $-i\sqrt{2}$ d) $1+i\sqrt{2}$

3-5. Determine as partes reais e imaginárias de $(1+\sqrt{3}\,i)^{80}$.

3-6. Calcule $(1+i)^{20}$ e $(2+2i\sqrt{3})^{9}$.

3-7. Mostre que se tem para qualquer $z \in \mathbb{C}$

a) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$ b) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$

3-8. Mostre que para todos os números complexos z e w se tem

a) $|z|^2 = z\,\overline{z}$
b) $|zw| = |z||w|$
c) $|z+w| \leq |z| + |w|$

3-9. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ pode ser definido como o conjunto de matrizes de ordem 2

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que $M(a,0)+M(b,0) = M(a+b,0)$ e $M(a,0)\cdot M(b,0) = M(a\,b,0)$. Identifique $M(a,0)$ com o número real a.
b) Mostre que $M(0,1)^2 = -1$. Represente por i a matriz $M(0,1)$.
c) Mostre que $M(a,b) = a+bi$.

d) Determine a soma e o producto de $M(a,b)$ e $M(c,d)$ e veja que correspondem, pela identificação acima, à adição e multiplicação habituais de números complexos.

3-10. Descreva geometricamente os conjuntos de pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem as seguintes condições:

a) $\|z - i + 3\| \leq 3$	b) $\|z - i - 1\| > 2$
c) $\mathrm{Im}(z) > 0$	d) $\|z\| \geq \|2z + 1\|$

3-11. Mostre por indução que, para todo $z \neq 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 2z + 3z + ... + nz^{n-1} = \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

Deduza que para $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

3-12. Mostre que se $z = x + iy$ onde $x, y \in \mathbb{R}$, então $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$.

3-13. Considere $\theta \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ calcule a soma

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\,\theta) + \cdots + \cos(\,(2n+1)\theta\,)\ .$$

3-14. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$

a) $x^4 + x^2 + 1 = 0$	b) $x^4 - i = 0$
c) $z^2 - (3+i)z + (2+i) = 0$	d) $z^3 + i = 0$

3-15. Dados $0 \leq r < 1$ e $\theta \in \mathbb{R}$, mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}$ converge e determine a sua soma.

3-16. Mostre que a seguinte série converge absolutamente para $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n\ .$$

3-17. Determine o raio de convergência das seguintes séries

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n$	d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(4n)!z^n}$

3-18. Sejam $x,\, y \in \mathbb{C}$ números complexos tais que $|x| < |y|$. Determine o raio de convergência da série

$$\sum (2\, x^n - 7\, y^n)\, z^n$$

3-19. Prove que $\dfrac{dz^n}{dz} = n\, z^{n-1}$.

3-20. Demonstre a fórmula de Moivre

$$(\cos\theta + i\, \sin\theta)^n = \cos(n\,\theta) + i\, \sin(n\,\theta) \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3-21. A partir da definição de $\sin z$ e de $\cos z$ mostre que:

a) $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1 \;\;,\quad \forall z \in \mathbb{C}$

b) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1\,, \quad \forall\, z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$.

3-22. Mostre que $|\cos(iy)| > e^{|y|}/2$, para todo o $y \in \mathbb{R}$.