Análise Infinitesimal II
SÉRIES NUMÉRICAS

2-1. Diga, justificando, se as seguintes somas são iguais:

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} \frac{(-2)^{k-2}}{k+4}$ $\qquad$ $\displaystyle\frac{1}{64}\sum_{k=7}^{14} \frac{(-2)^{k}}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{7} \frac{1}{k^2-16}$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+8)}$

c) $\displaystyle\sum_{k=8}^{18} \frac{1}{4k^2-36}$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{k=10}^{30} \frac{1}{k(k+12)}$

d) $\displaystyle\sum_{k=8}^{18} \frac{1}{4k^2-36}$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{k=10,\,\mathrm{par}}^{30} \frac{1}{k(k+12)}$

2-2. Calcule as somas parcias $\{s_n\}$ e a soma de cada uma das séries, quando possível

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ $\qquad$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+4k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ $\qquad$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/k}-(k+1)^{1/(k+1)}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ $\qquad$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\right)$ $\qquad$ h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

2-3. Considere a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$

a) Prove que é uma série convergente.
b) Determine o mais pequeno inteiro k tal que

$$|S_k - L| < 0.0001$$

onde L e S_k denotam o limite e a sucessão das somas parciais, respectivamente da série acima considerada.

2-4. Determine a soma das séries

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5+2^k}{10^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k-2^k}{7^{k-1}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^{k+2}}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}+3^k}{5^{2k-1}}$

2-5. Encontre todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a seguinte série converge. Para esses valores x calcule o valor da série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x^{k+1}-x^k)(x^{k+1}+x^k)$$

2-6. Escreva as seguintes dízimas como uma série infinita e exprima a soma como o quociente de dois inteiros

a) 0.55555...
b) 0.3252525...

2-7. Mostre que as seguintes séries são divergentes

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{k^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2^{-k}+k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k+k}$

2-8. Considere a seguinte série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

a) Prove que é uma série divergente.
b) Calcule $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.
c) A série acima indicada constitui um contra exemplo à afirmação *'Se $a_n \to 0$, então $\sum a_n$ é convergente'*. Indique outro exemplo.

2-9. Seja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uma série convergente e $\displaystyle R_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} x_j$. Mostre que

$$\lim_{k\to\infty} R_k = 0$$

2-10. Sejam $\sum x_k$ e $\sum y_k$ duas séries convergentes e α e $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que $\sum (\alpha x_k + \beta y_k)$ é uma série convergente.
b) Pode afirmar que $\sum x_k y_k$ é convergente? Justifique a sua resposta.

2-11. Sejam $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ sucessões de termos positivos. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
a) Se $\lim_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0$ e $\sum y_k$ for convergente, então $\sum x_k$ é também uma série convergente.
b) Se $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = 1$ e $\sum x_k$ for uma série convergente, então $\sum y_k$ converge.
c) Se $\sum x_k$ for uma série convergente, então $\sum x_k^2$ é uma série convergente.
d) Se $\sum x_k^2$ for convergente, então $\sum x_k$ é também convergente.

2-12. Diga justificando o valor lógico das afirmações seguintes
a) Se $\sum (a_n)^2$ converge então $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge.
b) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes de termos positivos então $\sum \sqrt{a_n b_n}$ é convergente

2-13. Estude, quanto à convergencia, as seguintes séries

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{4^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3^k e^{-2k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\ln(k+3)}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^3+k^2+1}$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+\sqrt{k^5+1}}$ h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+\cos k}{k^3}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^5}$ j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k!)}$

k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k+k}$ l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3k+3)}$

m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+\sqrt{n})\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)\text{arctg}\,\sqrt{n}}{5n^4+2n^2-5}$ p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{\sqrt[3]{n}}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)^n$

2-14. Seja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uma série convergente. Prove que a sucessão das suas somas parciais é limitada.

2-15. Determine se as seguintes séries convergem absolutamente, simplesmente ou são divergentes

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k+1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)!}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}+1}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{k^k}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\,\log n}{\sqrt{n^3+\sqrt{n}}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n^2+1)\log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{e}{n}\right)^n n!$

2-16. Indique o intervalo de convergência das seguintes séries de potências, estudando o seu comportamento nos extremos

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}x^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\sqrt{k!}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}x^k$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4^k}{5^{k+1}}x^k$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k x^k$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k(x+1)^k$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3}{5}\right)^k (x+1)^k$ h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (x-3)^k$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, x^k$ j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\, x^k$

2-17. Indique para que valores de x são convergentes as séries seguintes

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (1-|x|)^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k+2} \left(\frac{1}{2+|x|}\right)^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^k \sin(3k)$

2-18. Se retirar os primeiros K termos da série $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ o raio de convergência da série é alterado?

2-19. Seja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uma série absolutamente convergente e $\{y_k\}$ uma sucessão limitada. Mostre que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k$ é absolutamente convergente.