Análise Infinitesimal II
LIMITES DE SUCESSÕES

1-1. Calcule os seguintes limites

a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{5^n+7^{n+1}}$

c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})$

d) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}+4^n}{5^n+7^{n+1}}$

e) $\lim_{n\to\infty} n-\sqrt{2n+1}\sqrt{n+3}$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^n$

g) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+2}$

h) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n}$

i) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^n$

j) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

k) $\lim_{n\to\infty} n\sin(n\pi)$

l) $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}$

m) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$

n) $\lim_{n\to\infty} n^n$

o) $\lim_{n\to\infty}(n^3+n)^{1/n}$

p) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$

q) $\lim_{n\to\infty} 3^{-n}\sin(n^4+n^2+3n+2)$

r) $\lim_{n\to\infty}(3^n+7^n)^{1/n}$

s) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{3n+5-5^{1/n}}$

t) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{4^{1/n}+3n}$

u) $\lim_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 (xe^{-x})^n\,dx$

1-2. Dê exemplos de sucessões $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ tais que $u_n\to+\infty$, $v_n\to-\infty$ e

a) $\lim(u_n+v_n)=0$
b) $\lim(u_n+v_n)=10$
c) $\lim(u_n+v_n)=+\infty$
d) $\lim(u_n+v_n)=-\infty$
e) $\lim(u_n+v_n)$ não existe.

1-3. Dê exemplos de sucessões $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ tais que $u_n\to 0$, $v_n\to+\infty$ e

a) $\lim(u_nv_n)=a$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
b) $\lim(u_nv_n)=0$

c) $\lim(u_n v_n) = +\infty$
d) $\lim(u_n v_n) = -\infty$
e) $\lim(u_n v_n)$ não existe.

1-4. Considere a sucessão $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.33$, $a_3 = 0.333$ *et cetera.*

a) Determine o mais pequeno inteiro N tal que $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < 0.01$ para toda a ordem $n \geq N$.
b) Determine o mais pequeno inteiro N tal que $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < 0.001$ para toda a ordem $n \geq N$.
c) Dado $\epsilon > 0$ determine $p(\epsilon)$ tal que $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < \epsilon$ para toda a ordem $n \geq p(\epsilon)$.

1-5. Considere a sucessão de termo geral $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.55$, $a_3 = 0.555$ *et cetera.*

a) Determine o mais pequeno inteiro N tal que $\left|a_n - \frac{5}{9}\right| < 0.001$ para toda a ordem $n \geq N$.
b) Dado $\epsilon > 0$, encontre $p(\epsilon)$, tal que $\left|a_n - \frac{5}{9}\right| < \epsilon$ para toda a ordem $n \geq p(\epsilon)$.

1-6. As sucessões $\{a_n\}$, onde a_n é definido por cada uma das seguintes expressões, convergem para 0.

a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ b) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ c) $a_n = \dfrac{1}{n^n}$

d) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ e) $a_n = \dfrac{1}{\log n}$

Para cada uma das sucessões $\{a_n\}$, encontre o mais pequeno inteiro N, tal que

$$|a_n - 0| < 0.001$$

para toda a ordem $n \geq N$. Qual das sucessões acima indicadas converge mais rapidamente para zero?

1-7. Mostre usando a definição de limite de uma sucessão

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+3} = 1$
c) $\lim\limits_{n\to\infty} 5\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 5$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin na}{n} = 0 \quad a \in \mathbb{R}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{\cos n}{n-1} = 0$
f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n-1} = 0$

1-8. Prove que para qualquer sucessão $\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se e só se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

1-9. Prove que $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$.

1-10. Seja $\{a_n\}$ uma sucessão tal que $\lim_{n\to\infty} a_n^3 = 8$
a) Determine uma função $f(x)$ tal que $|x^3 - 8| = |x-2|f(x)$.
b) Determine o valor mínimo de $f(x)$.
c) Encontre uma constante C tal que $|x-2| \leq C|x^3-8|$.
d) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

1-11. Considere as sucessões $\{a_n\}$ definidas recursivamente por
a) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \qquad (n \geq 1)$
b) $a_1 = 0 \qquad a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{a_n+3} \qquad (n \geq 1)$
c) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} \qquad (n \geq 1)$
Mostre que cada uma das sucessões $\{a_n\}$ converge e determine o seu limite.

1-12. Considere a sucessão

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

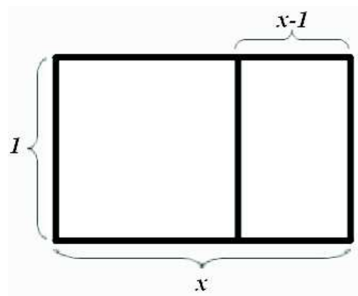
a) Calcule os três primeiros termos da sucessão.
b) Prove por indução que
   1. $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
   2. (u_n) é crescente.
c) Prove que (u_n) é convergente e determine o limite.

1-13. Sejam$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sucessões de termos positivos, tais que, para $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad\qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

a) Prove que para $n \geq 2$, $\{a_n\}$ é monótona decrescente e $\{b_n\}$ é monótona crescente.
b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

1-14. Chama-se *proporção de um rectângulo* à razão entre os comprimentos dos seus lados maior e menor. A razão de um rectângulo é sempre um número maior ou igual a um. Chama-se *razão de oiro* à proporção de um rectângulo que possa ser decomposto num quadrado e noutro rectângulo exactamente com a mesma proporção.



a) Mostre que a razão de oiro λ é solução da equação

$$x = 1 + \frac{1}{x} \; .$$

b) Veja que as raízes desta equação são $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\cdots$ e $-\lambda^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618034\cdots$.

c) Mostre que quaisquer que sejam os números a, $b \in \mathbb{R}$, a sucessão

$$x_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \; ,$$

satisfaz a equação recursiva

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \; , \quad \text{para todo o } \; n \geq 2 \; .$$

d) Determine os coeficientes a e b de modo que a sucessão da alínea anterior satisfaça as condições iniciais $x_0 = x_1 = 1$. Como relaciona a sucessão obtida com a sucessão de Fibonacci?

e) Mostre que a sucessão de Fibonacci, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = f_1 = 1$, satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; .$$

1-15. Considere o número de oiro $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\cdots$, e a sucessão $\{r_n\}$ definida recursivamente por $r_1 = 1$, e

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}} \; , \quad \text{para } \; n > 1 \; .$$

Mostre que:

a) Sendo f_n a sucessão de Fibonacci, $r_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$, para todo o $n \geq 1$.

b) Para todo o $n \geq 1$, $r_n \geq 1$.
c) Para todo o $n \geq 1$,

$$|r_n - \lambda| \leq \frac{1}{\lambda} |r_{n-1} - \lambda| \ .$$

Sugestão: $|r_n - \lambda| = \left|1 + \frac{1}{r_{n-1}} - 1 - \frac{1}{\lambda}\right| = \left|\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{\lambda}\right|$.

d) Para todo o $n \geq 1$,

$$|r_n - \lambda| \leq \frac{1}{\lambda^{n+1}} \ .$$

e) $\lim_{n\to\infty} r_n = \lambda$.

1-16. Seja $a_n = (-1)^n$. Indique uma subsucessão de $\{a_n\}$ que seja convergente e uma subsucessão não convergente.

1-17. Seja $a_n = (-1)^n 2n + 2n$. Indique uma subsucessão convergente.

1-18. Considere as sucessões $\{a_n\}$ definidas por

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{n+1}{n+5} + 2(-1)^n \qquad \text{(b)} \quad a_n = \cos(n\pi)$$

Mostre, usando subsucessões, que cada uma das sucessões acima indicadas não tem limite.

1-19. Para cada uma das sucessões $\{a_n\}$ determine os seus sublimites e os pontos de acumulação do seu conjunto de termos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

a) $a_n = \dfrac{1}{n+5}$ b) $a_n = \cos n\pi$

c) $\{a_n\} = \{\ 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, 1, \ldots\ \}$

1-20. Considere a sucessão $\{a_n\}$ cujo termo geral é dado pela expressão

$$a_n = \frac{2}{n+1} + (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

a) Prove que $\{a_n\}$ tem dois sublimites: -1 e 1.
b) O que pode concluir sobre o limite desta sucessão?

1-21. Mostre que a sucessão de termo geral a_n dado por

$$a_n = \frac{(n^4 + 2n^3 + 1)\sin(2n^2 + 1)}{(n^4 + 5n^3)}$$

possui uma subsucessão convergente.

1-22. Seja $\{a_n\}$ uma sucessão arbitrária de números reais. Para as sucessões $\{b_n\}$ abaixo indicadas indique as que, independentemente da sucessão $\{a_n\}$ considerada, possuem sempre uma subsucessão convergente.

a) $b_n = \dfrac{1}{1+\sin {a_n}^2}$ b) $b_n = a_n^n + 2$

c) $b_n = 2\cos a_n$ d) $b_n = \dfrac{1}{1+|a_n|}$

1-23. Considere a sucessão de termo geral $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Usando a definição, prove que $\{a_n\}$ é uma sucessão de Cauchy.

1-24. Seja $\{a_n\}$ uma sucessão cujo termo geral a_n satisfaz a propriedade

$$|a_n - a_{n+1}| \le \frac{1}{2^n}$$

Prove que $\{a_n\}$ é uma sucessão de Cauchy.

1-25. Seja $\{a_n\}$ uma sucessão cujo termo geral a_n satisfaz a propriedade

$$|a_n - a_{n+1}| \le \frac{1}{2}\,|a_{n-1} - a_n|$$

Prove que $\{a_n\}$ é uma sucessão de Cauchy.

1-26. Considere a sucessão de termo geral a_n, definida recursivamente por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{a_n+1} \quad (n \ge 1)$$

Mostre que $\{a_n\}$ converge e determine o seu limite.

1-27. Indique o supremo, infímo, máximo e mínimo, caso existam, de cada um dos seguintes conjuntos:

a) $\left\{ \dfrac{1+2n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$ b) $\left\{ \dfrac{2n-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$

c) $\{ \, x \in \mathbb{R} : \ |x-2| \le 3 \, \}$ d) $\left\{ \dfrac{1}{5n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$

e) $\{ \, n \in \mathbb{N} : \ n^2 = 3 \, \}$ f) $\mathbb{N}$.

1-28. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^2 x^n \, dx \right)^{1/n} = 2$$