Análise Infinitesimal II
COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

1a-1. Prove que:

a) Para todo o natural $n \geq 1$

$$\frac{1}{n+1} < \log\,(n+1) - \log\, n < \frac{1}{n}.$$

(*Sugestão: Utilize o teorema de Lagrange.*)

b) $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

c) $\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$

1a-2. Estabeleça que:

a) $\sqrt{n^3+2n^2+3n+1} \sim n\sqrt{n}$

b) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

1a-3. Prove a propriedade transitiva da relação $\sim$, isto é,

$$u_n \sim v_n \quad \text{e} \quad v_n \sim w_n \quad \Longrightarrow \quad u_n \sim w_n$$

1a-4. Prove a seguinte propriedade da relação $\sim$,

$$u_n = o(v_n) \quad \Longrightarrow \quad v_n + u_n \sim v_n$$

1a-5. Considere as sucessões $u_n = n^2+3n$ e $v_n = -n^2$. Verifique que existem sucessões (u'_n) e (v'_n) tais que

$$u_n \sim u'_n \quad \text{e} \quad v_n \sim v'_n \quad \text{e no entanto} \quad u_n + v_n \not\sim \; u'_n + v'_n.$$

1a-6. Calcular os limites, usando a relação $\sim$

a) $\lim \frac{(2n^3+3n^2+5)\sqrt{n^2+2n-3}}{5n^4+3n^3-5n+10}$

b) $\lim 2n^2 \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

c) $\lim \frac{3^n - e^{n+1}}{e^n - 3^{n+2}}$

1a-7. Considere as sucessões $u_n = \sqrt{n^4+2}$ e $v_n = n+1$. Diga quais das relações seguintes são verdadeiras:

$$u_n = o(v_n), \quad u_n = O(v_n), \quad v_n = o(u_n), \quad v_n = O(u_n).$$

1a-8. Sejam (u_n) e (v_n) sucessões tais que: $u_n = O(\frac{1}{n})$, $v_n = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.
Prove que:

$$u_n \cdot v_n = o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).$$

1a-9. Sejam $(u_n), (v_n)$ e (w_n) sucessões tais que: $u_n = O(v_n)$ e $\lim \frac{v_n}{w_n} = 0$. Verifique que $\lim \frac{u_n}{w_n} = 0$.

1a-10. Calcule os seguintes limites

a) $\lim \left(1 - \sin \dfrac{1}{2n^2+1}\right)^{\frac{1}{\log\,(\frac{n^2+2}{n^2})}}$

b) $\lim \sqrt[n]{(n^2)!}\,\left(\frac{e}{n^2}\right)^n$

c) $\lim \dfrac{n^4+7n-8}{n^5 \tan \frac{1}{3n+1}}$

d) $\lim \dfrac{\sqrt{n+3}\log\,(n^2+1)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{4\log\,n}$

1a-11. Usando a aproximação de Stirling elementar determine:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n}(n!)^{2/n}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n}$

1a-12. Para os pares de sucessões dadas $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, diga quais das seguintes relações são verdadeiras: $u_n \sim v_n$, $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(u_n)$, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ e $v_n = \mathcal{O}(u_n)$

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\quad v_n = \dfrac{1}{5n}$

b) $u_n = \sqrt{n^5+2}$ $\quad v_n = n$

c) $u_n = \sqrt[n]{n}$ $\quad v_n = \sqrt[n]{n+\pi}$

d) $u_n = \log(3n+2)$ $\quad v_n = \log(3n+4)$

e) $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\sin(n^n)$ $\quad v_n = 3n+2$