FUNÇÕES

Dados conjuntos X e Y, uma função $f : X \to Y$ é um procedimento que para cada argumento x em X retorna um valor $f(x)$ no conjunto Y. O objecto $f(x)$ diz-se o valor de f no argumento x. O conjunto X diz-se o domínio de f. Os elementos de X dizem-se os argumentos, ou a variavel livre de f. Para expressar o facto de f ter domínio X diremos também que a função f está definida para os argumentos em X. Uma função f definida num subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ diz-se uma função de variavel real. Nesta disciplina iremos estudar funções de variavel real com valores em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$.

MANEIRAS DE DEFINIR FUNÇÕES

1. Através de uma expressão algébrica.

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}\ , \qquad f : D_f \to \mathbb{R}\ , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(t) = (\cos t, \sin t)\ , \quad g : D_g \to \mathbb{R}^2\ , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$h(u) = \frac{u\, e^u}{1-u^2}\ , \qquad h : D_h \to \mathbb{R}\ , \quad D_h = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

   Cada expressão algébrica determina naturalmente um domínio para a função correspondente, formado pelos argumentos para os quais a expressão tenha significado.

2. Através de um algorítmo.

   Dada uma função $y = f(x)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, define-se uma nova função $g(x)$ pelo seguinte algorítmo geométrico sobre o gráfico de f.

   (a) Encontre o ponto de intersecção P entre a diagonal $y = x$ e a recta horizontal que passa pelo ponto $(x, f(x))$;

   (b) Encontre o ponto de intersecção Q entre o gráfico $y = f(x)$ e a recta vertical que passa pelo ponto P;

   (c) Retorne $g(x) =$ordenada de Q;

   Faça um esboço com a construção geométrica de $g(x)$ e relacione a função g com f.

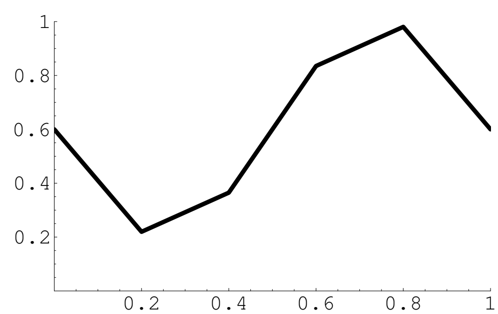
3. Por regras condicionais.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 + x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se} \quad 1 < x \end{cases}$$

4. Através de uma tabela

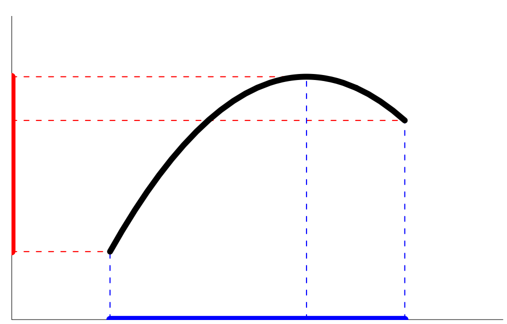
x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.6	0.219	0.365	0.835	0.98	0.6

5. Através de um gráfico



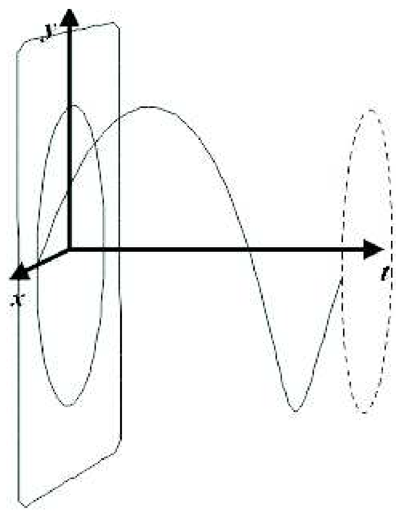
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES

Chama-se gráfico de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ao conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \in D$ e $y = f(x)$. O gráfico de uma função $f(x)$ definida algébricamente é sempre uma curva.



Recíprocamente, uma curva $C \subseteq \mathbb{R}^2$ define o gráfico de uma função se, e só se, nenhuma recta vertical intersectar C em mais do que um ponto. O *domínio* da função f definida por C é o conjunto de todos os pontos x tais que a recta vertical que passa por $(x, 0)$ intersecta C. Analogamente, a *imagem* (contradomínio) da função f é o conjunto de todos os pontos y tais que a recta horizontal que passa por $(0, y)$ intersecta C.

Chama-se gráfico de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, ao conjunto de todos os pontos $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ tais que $t \in D$ e $(x, y) = f(t)$.



A projecção ortogonal do gráfico de f sobre o plano contendo os eixos dos xx e dos yy dá-nos a imagem (contradomínio) da função f. Se a função $f(t)$ estiver definida algébricamente o seu gráfico é uma curva no espaço $\mathbb{R}^3$, enquanto a sua imagem é uma curva plana em $\mathbb{R}^2$. Dizemos que a curva imagem de f é parametrizada pela função $f(t)$. Se o domínio D fôr um intervalo, pense em D como um intervalo de tempo e imagine $f(t)$ descrevendo a posição, no instante t, de um ponto material em movimento no plano.

OPERAÇÕES E COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

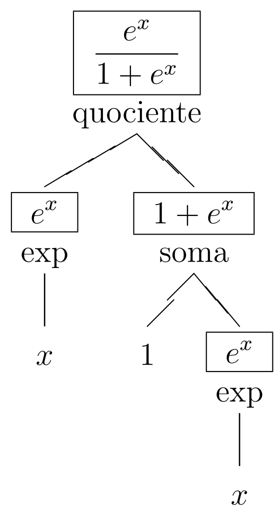
Consideremos funções associadas às operações algébricas usuais:

1. $\text{soma}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
2. $\text{produto}(x_1, \cdots, x_n) = x_1 * x_2 + \cdots * x_n$

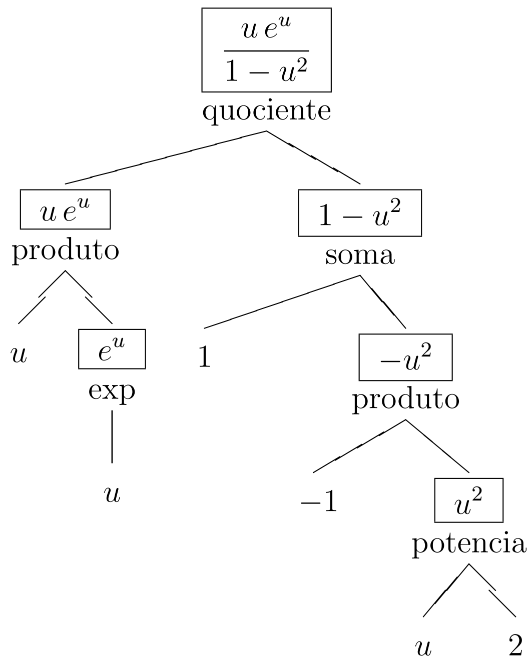
3. quociente$(x, y) = x/y$ definida se $y \neq 0$.

4. potencia$(x, p) = x^p$ definida se: *(i)* $p \in \mathbb{N}$ e x é arbitrário ; ou *(ii)* $p \in \mathbb{Z}^-$ e $x \neq 0$; ou *(iii)* $p \in \mathbb{R}^+$ e $x \geq 0$; ou finalmente *(iv)* $p \in \mathbb{R}^-$ e $x > 0$.

Toda a expressão algébrica é encabeçada por uma determinada função, ou operação, actuando sobre um certo número de expressões argumento, que se dizem subexpressões da expressão em causa. Assim, cada expressão algébrica é, em geral, constituída por subexpressões, que por sua vez são formadas a partir de subexpressões mais simples, e assim por diante numa hierarquia que termina nas suas subexpressões atómicas: constantes, parâmetros e variaveis. A estrutura de uma expressão pode ser especificada através de uma *árvore generativa* onde cada nó corresponde a uma subexpressão, e as ramificações a partir desse nó aos argumentos dessa subexpressão.

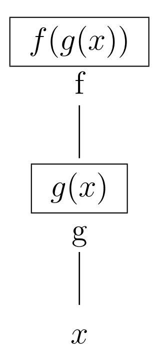


$$\frac{e^x}{1+e^x} = \text{quociente}\left(\exp(x)\,,\ \text{soma}(1,\ \exp(x))\right)$$



$$\frac{u\,e^u}{1-u^2} = \text{quociente}\left(\text{produto}(u, \exp(u))\,,\ \text{soma}(1,\ \text{produto}(-1, \text{potencia}(u, 2)))\right)$$

Cada expressão algébrica é obtida compondo as funções que encabeçam as suas subexpressões. Um caso importante de composição é aquele em que uma expressão é obtida por combinação de duas funções de um único argumento. A expressão composta $f(g(x))$ tem a seguinte árvore generativa



que resulta de combinar as acções das funções g e f, por esta ordem, sobre o argumento x. Denota-se esta composição por $f \circ g$, $\quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Por definição a composição está definida quando $g(x)$ estiver definida, i.e. $x \in D_g$ (domínio de g) e $f(g(x))$ também, i.e. $g(x) \in D_f$. Assim o domínio da composição $f \circ g$ é

$$D_{f \circ g} = \{\, x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f \,\}$$

TRANSFORMAÇÕES DE GRÁFICOS,
por composição com aplicações lineares $x \mapsto a\,x + b$

Translação segundo $b \in \mathbb{R}$,

$$T_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T_b(x) = x + b \ .$$

Re-escalamento de factor $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,

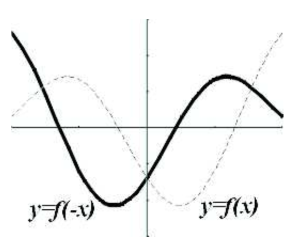
$$M_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad M_a(x) = a\,x \ .$$

Composição	Expressão	Transformação do gráfico $y = f(x)$	
$T_b \circ f$	$b + f(x)$	$(x, y) \mapsto (x,\ y + b)$	Transl. vertical segundo b
$f \circ T_b$	$f(x + b)$	$(x, y) \mapsto (x - b,\ y)$	Transl. horizontal segundo $-b$
$M_a \circ f$	$a\,f(x)$	$(x, y) \mapsto (x,\ a\,y)$	Re-escalam. vertical de factor a
$f \circ M_a$	$f(a\,x)$	$(x, y) \mapsto (x/a,\ y)$	Re-escalam. vertical de factor $1/a$

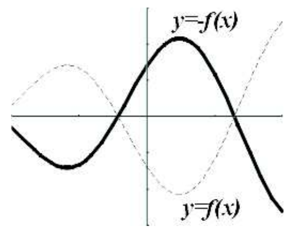
Na terceira coluna da tabela acima $(x, y) \mapsto (x_1,\ y_1)$ significa que se (x, y) pertence ao gráfico de f então (x_1, y_1) pertence ao gráfico da função composta.

Exemplos:

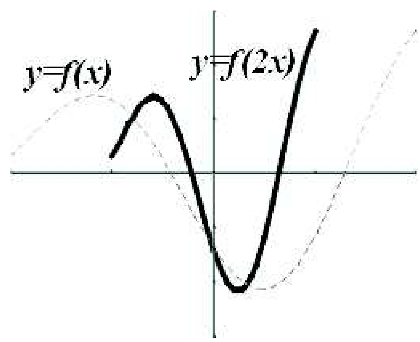
1. O gráfico $y = f(-x)$ resulta de $y = f(x)$ por uma reflexão em torno do eixo vertical.

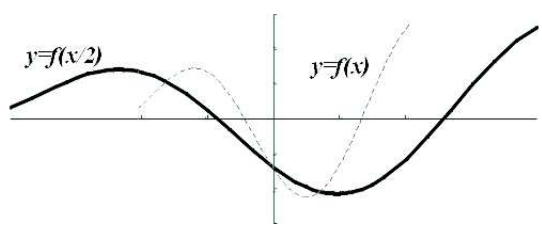


2. O gráfico $y = -f(x)$ resulta de $y = f(x)$ por uma reflexão em torno do eixo horizontal.

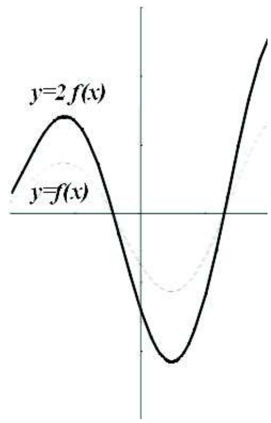


3. Os gráficos $y = f(2\,x)$ e $y = f(x/2)$ resultam de $y = f(x)$ por re-escalamentos na direcção horizontal respectivamente de factores $1/2$ e 2.

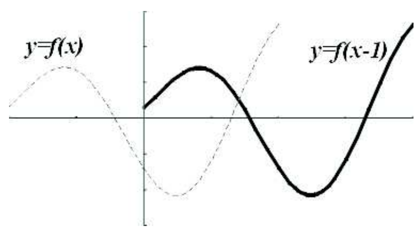


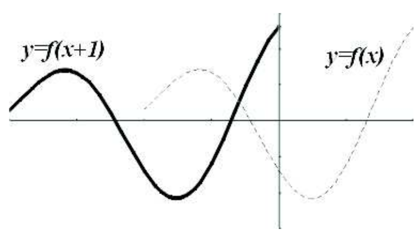


4. O gráfico $y = 2\,f(x)$ resulta de $y = f(x)$ por um re-escalamento na direcção vertical de factor 2.



5. Os gráficos $y = f(x-1)$ e $y = f(x+1)$ resultam de $y = f(x)$ por translações na direcção horizontal respectivamente segundo 1 e -1.

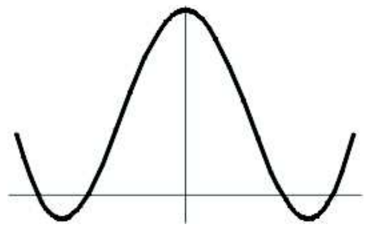




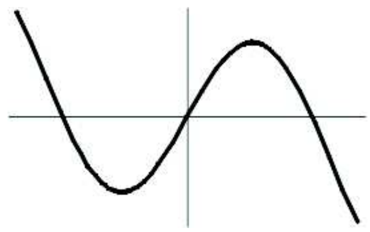
FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Seja $f(x)$ uma função definida em $\mathbb{R}$.

f diz-se *par* $\iff$ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$ $\iff$ o gráfico de $f(x)$ é invariante por reflexão em trono do eixo vertical.



f diz-se *ímpar* $\iff$ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)$ $\iff$ o gráfico de $f(x)$ é invariante por uma composição de duas reflexões, uma em trono do eixo vertical seguida de outra em torno do eixo horizontal.



INJECTIVIDADE E FUNÇÕES INVERSAS

Uma função f diz-se *injectiva* $\iff$ quaisquer que sejam $x,\ y \in D_f$,

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y)\ .$$

$\iff$ nenhuma recta horizontal intersecta o gráfico de f em mais do que um ponto.

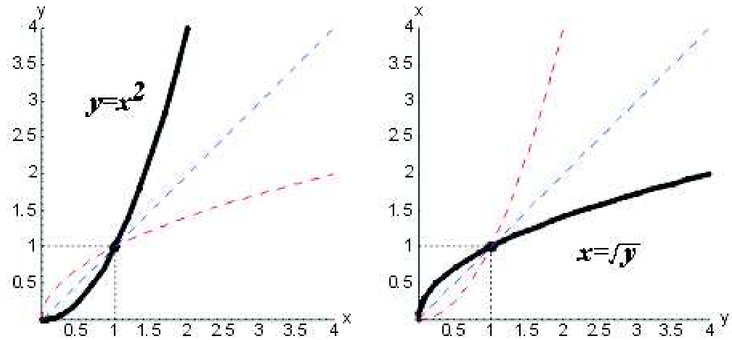
Se uma função f é injectiva então a função inversa, f^{-1}, de f tem domínio e imagem respectivamente iguais à imagem e domínio de f, estando f^{-1} definida por

$$x = f^{-1}(y) \quad \iff \quad y = f(x)\ .$$

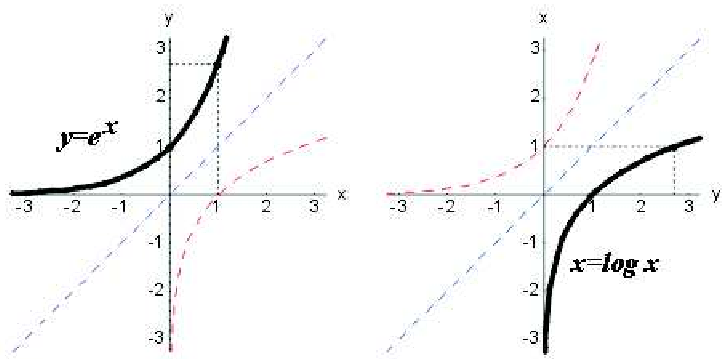
Mantendo as posições dos eixos dos xx e dos yy, as funções f e f^{-1} partilham o mesmo gráfico. Invertendo essas posições, os dois gráficos ficam simétricos relativamente à diagonal $y = x$. Um é a imagem do outro pela reflexão $(x, y) \mapsto (y, x)$ que fixa a diagonal $y = x$ e troca as posições dos dois eixos.

Exemplos:

1. $y = x^2$, $(x \geq 0)$ e a sua inversa $x = \sqrt{y}$, $(y \geq 0)$



2. $y = e^x$, e a sua inversa $x = \log y$, $(y > 0)$



3. $y = \cos x$, $(x \in [0, \pi])$ e a sua inversa $x = \arccos y$, $(y \in [-1, 1])$