Exercícios de Análise Infinitesimal I

8.1. Em cada uma das alíneas determine $f'(0)$ sabendo que $h(0) = 3$ e $h'(0) = 2$.

a) $f(x) = x\,h(x)$ b) $f(x) = h(x) + \dfrac{1}{h(x)}$

8.2. Determine os pontos onde a tangente à curva:

a) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, é horizontal.

b) $y = -\cos x + \dfrac{1}{3}\cos^3 x$, é horizontal.

c) $y = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$, é perpendicular à recta $y - \sqrt{2}\,x = 1$.

d) $y = \arcsin\dfrac{x}{3}$, é paralela à recta $y = \frac{1}{3}\,x + 3$.

8.3. Determine os coeficientes A, B e C de modo que a curva

$$y = A\,x^2 + B\,x + C$$

passe pelo ponto $(1,3)$ e seja tangente à recta $4\,x + y = 8$ no ponto $(2,0)$.

8.4. Determine condições em a, b, c e d que garantam que o gráfico de

$$p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d\ , \qquad a \neq 0$$

tenha

a) exactamente duas tangentes horizontais.
b) exactamente uma tangente horizontal.
c) nenhuma tangente horizontal.

8.5. Encontre os valores de c, caso existam, para os quais a tangente ao gráfico de

$$f(x) = x/(x+1)$$

no ponto $(c, f(c))$ seja paralela à recta que passa pelos pontos $(1, f(1))$ e $(3, f(3))$.

8.6. Sendo

a) $y = (x+1)(x+2)$ b) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $y = \dfrac{x^2-3}{x}$ d) $y = 7\,x^3 - 6\,x^5$

Calule

1. $\dfrac{dy}{dx}$ 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 3. $\dfrac{d}{dx}\left(y\,\dfrac{dy}{dx}\right)$

8.7. Encontre um polinómio quadrático $P(x)$ tal que $P(1) = 3$, $P'(1) = -2$ e $P''(1) = 4$.

8.8. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Mostre que $g'(0)$ e $g''(0)$ existem ambos e determine os seus valores.
b) Determine $g'(x)$ e $g''(x)$ para todo o x.
c) Mostre que $g'''(0)$ não existe.
d) Esboce o gráfico de g.

8.9. Mostre que cada uma das funções seguintes é injectiva na região indicada e determine a derivada $\frac{dx}{dy}$, onde $x = f^{-1}(y)$, expressa em função de y.

a) $y = f(x) = x^2 + 1$ $\quad x \in]0, +\infty[$

b) $y = f(x) = x^3 + 3\,x + 2$ $\quad x \in \mathbb{R}$

c) $y = f(x) = 2 - \cos(3\,x)$ $\quad x \in]0, \pi/3[$

8.10. Sejam f e g funções diferenciáveis. Pela regra de derivação de um produto temos:

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g' \; .$$

a) Mostre que se f e g são funções duas vezes diferenciáveis,

$$(f\,g)'' = f''\,g + 2\,f'\,g' + f\,g'' \; .$$

b) Prove por indução que se f e g são funções n vezes diferenciáveis,

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}\,g^{(n-i)} \; .$$