Exercícios de Análise Infinitesimal I

7.1. Para cada uma das funções apresentadas determine a sua derivada formando o quociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e tomando o limite quando h tende para 0.

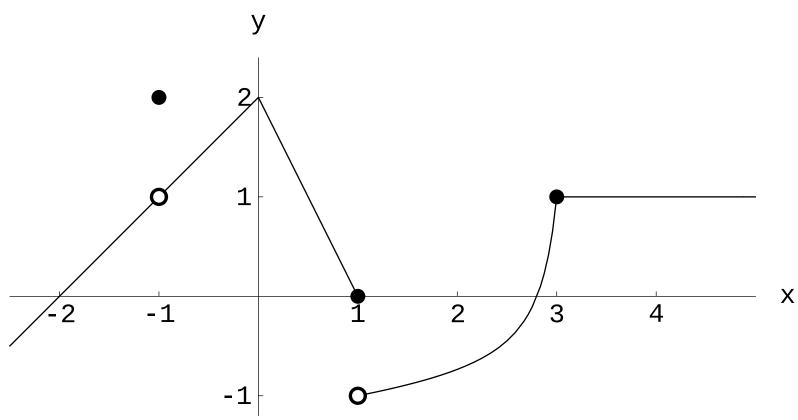
a)	$f(x) = c$	b)	$f(x) = 4\,x + 1$
c)	$f(x) = 2\,x^3 + 1$	d)	$f(x) = 1/(x+3)$
e)	$f(x) = x^3 - 4\,x$	f)	$f(x) = 1/\sqrt{x}$

7.2. Encontre equações para as rectas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ sendo

a) $f(x) = 5\,x - x^2$ e $a = 4$

b) $f(x) = 1/x^2$ e $a = -2$

7.3. Considere uma função com o seguinte gráfico



a) Em que pontos f não é contínua? Em cada caso veja se é uma descontinuidade removível, uma descontinuidade por salto, ou nenhum dos casos anteriores.

b) Em que pontos f é contínua mas não diferenciável?

7.4. Para cada uma das funções seguintes

a) $f(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2\,x^3 + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $c = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ (x+1)^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ e $c = -1$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \leq 2 \\ 2\,x - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ e $c = 2$

1) Discuta a continuidade de f no ponto c.

2) Determine

$$f_-{}'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

e

$$f_+{}'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

3) Diga se f é diferenciável no ponto c.

7.5. Em cada uma das alíneas o limite dado representa a derivada de uma função f num certo ponto c. Determine f e c em cada caso.

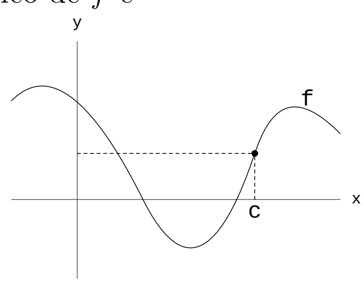
a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$ b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^3 + 8}{h}$

c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$ d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

7.6. Sabendo que f é uma função diferenciável, seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \leq c \\ f'(c)(x-c) + f(c) & \text{se} \quad x > c \end{cases}$$

a) Mostre que g é diferenciável em c. Qual é o valor de $g'(c)$?
b) Supondo que o gráfico de f é



esboce o gráfico de g.

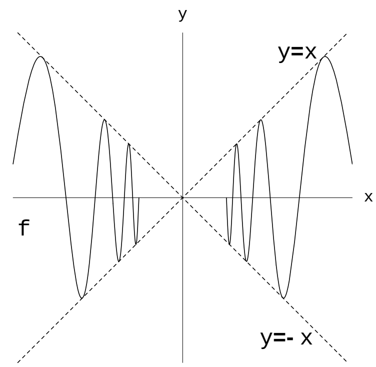
7.7. Sejam

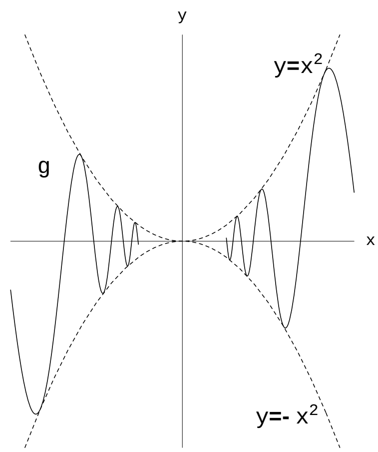
$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Os gráficos de f e g são representados nas figuras seguintes:





a) Mostre que f e g são ambas contínuas em 0.
b) Mostre que f não é diferenciavel em 0.
c) Mostre que g é diferenciavel em 0 e indique $g'(0)$.