Exercícios de Análise Infinitesimal I

6.1. Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados:

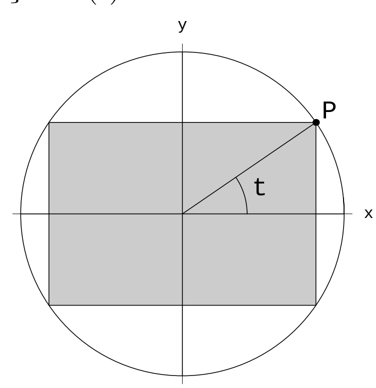
a) $x = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$.
b) $x = -\log x, \quad x \in]0, 1]$.
c) $2 + x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.
d) $x = f(x), \quad x \in [a, b]$ onde $f : [a, b] \to [a, b]$ é uma função contínua com valores no intervalo $[a, b]$.

6.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que os limites seguintes existem e são finitos:

$$A_+ = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad A_- = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

a) Dê um exemplo de uma função nestas condições sem máximo nem mínimo.
b) Dê um exemplo de uma função nestas condições, com $A_+ = A_-$, que não tenha mínimo (respectivamente máximo).
c) Mostre que qualquer função f nestas condições é limitada.
d) Mostre que toda a função nas condições acima com $A_+ = A_-$, ou tem máximo ou tem mínimo.

6.3. Considere a família de todos os rectângulos inscritos no círculo unitário cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.
a) Veja que é possível representar as áreas daqueles rectângulos por uma função $A(t)$ do ângulo $t \in [0, \pi/2]$ que o vértice $P = (\cos t, \sin t)$ no 1º quadrante faz com o semi-eixo positivo das abcissas.
b) Mostre que a função $A(t)$ tem um máximo. Determine-o.



6.4. a) Mostre que a função $f(x) = x^4 + x - 1$ tem pelo menos duas raízes reais.

b) Seja $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ um polinómio de grau par tal que $a_0 < 0$ e $a_n = 1$. Mostre que $P(x)$ tem pelo menos duas raízes reais.

6.5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Encontre f^{-1} e esboce o seu gráfico.
b) Mostre que f e f^{-1} são estritamente crescentes.
c) As funções f e f^{-1} são contínuas em todos os pontos?

6.6. Em cada uma das alíneas seguintes esboce o gráfico de uma função f definida em $[0,1]$ e satisfazendo (se possível) as condições dadas:

a) f contínua em $[0,1]$ com valor mínimo 0 e valor máximo 1.
b) f contínua em $[0,1[$ com valor mínimo 0 e sem valor máximo.
c) f contínua em $]0,1[$ assume os valores 0 e 1 mas não assume o valor $\frac{1}{2}$.
d) f contínua em $[0,1]$ assume os valores -1 e 1 mas não assume o valor 0.
e) f contínua em $[0,1]$ com valor mínimo 1 e valor máximo 1.
f) f contínua em $[0,1]$, não constante, não assume valores inteiros.
g) f contínua em $[0,1]$ não assume valores racionais.
h) f contínua em $[0,1]$ assume um valor máximo, um valor mínimo e todos os valores intermédios.
i) f contínua em $[0,1]$ assume apenas dois valores distintos.
j) f contínua em $]0,1[$ assume apenas três valores distintos.
k) f não contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo aberto e limitado.
l) f não contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.
m) f contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo ilimitado.
n) f contínua em $[0,1]$ tem por imagem um intervalo ilimitado.
o) f não contínua em $[0,1]$ tem por imagem o intervalo $[0,+\infty[$.
p) f contínua em $[0,1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.