Exercícios de Análise Infinitesimal I

5.1. Determine os pontos de continuidade e descontinuidade das funções, onde $I(x)$ representa a parte inteira de x.

a) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^2} - 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f(x) = xI(x), \quad x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} (x+1)\, 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} - 1 & x < 0 \\ I(x) + x & x \geq 0 \end{cases}$

5.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto c e suponha que $f(c) > 0$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$.

5.3. Seja $k > 0$ e suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição:

$$| f(x) - f(y) | \leq k \mid x - y \mid \quad \forall x , y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é contínua em todo o ponto $\mathbb{R}$.

5.4. Considere as seguintes funções reais de variável real:

a) $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}{x^2 + 4x + 3}$

a) Indique, em termos de intervalos, o domínio de cada uma das funções.

b) Verifique se as funções f, g e h se podem prolongar por continuidade a todo $\mathbb{R}$.

c) Verifique se a função $h(x)$ se pode prolongar por continuidade ao ponto $x = -1$.

5.5. Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e $f(x) = x + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Verifique que

$$\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0) \ .$$

Este resultado contradiz o teorema da função composta (para funções contínuas)? Justifique.