Exercícios de Análise Infinitesimal I

4.1. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Se (x_n) e (y_n) são sucessões divergentes, então a sucessão $(x_n + y_n)$ é divergente.

b) Se (x_n) e $(y_n + x_n)$ são sucessões convergentes, então a sucessão (y_n) é convergente.

4.2. Considere a sucessão

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

a) Calcule os três primeiros termos da sucessão.

b) Prove por indução que

1. $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
2. (u_n) é crescente.

c) Prove que (u_n) é convergente e determine o limite.

4.3. a) Prove que a sucessão $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ é monótona e convergente.

b) Prove que o limite $L = \lim u_n$, satisfaz $\frac{1}{2} \leq L \leq 1$.

4.4. Usando o teorema das sucessões enquadradas, calcule o limite das seguintes sucessões:

a) $n!/n^n$

b) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$

c) $(a/n)^n,\ \ a \in \mathbb{R}$

d) $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

4.5. Calcule os seguintes limites

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^3}{n^2+2n-1}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{3}{n+2})^n$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{3^{n+1}+4}$