

Exercícios de Análise Infinitesimal I

3.1. Estude os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x|}{x}$, $a \in \{-2, 0\}$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$, $a \in \mathbb{R}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} \sin x^2 & \text{se } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \text{ é inteiro} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$

3.2. Seja a um número real fixo. Determine os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

sendo

a) $f(x) = 5x + 2$ b) $f(x) = 4x + 5x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \sqrt{x+2}$.

3.3. Demonstre, utilizando a definição de limite, que:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$, $a \in \mathbb{R}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

3.4. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(2x)}$

3.5. Prove, recorrendo ao método de indução matemática, que:

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

c) $2^{n-1} \leq n!$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.