Exercícios de Análise Infinitesimal I

19.1. Determine as soluções dos seguintes problemas:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \sin(3x)$, $\quad y(\pi) = 1$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = \cosh(2x)$, $\quad y(0) = 2$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $\quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 2$.

d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x}$, $\quad y'(1) = 1$ e $y(1) = 0$.

19.2. Determine as soluções das seguintes equações diferenciais.

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 0$

c) $\dfrac{dy}{dx} = e^y \cos x$

d) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y + \sin 2y}{3x^2}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = -2\,y$

f) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \tan x$

19.3. Para cada uma das alíneas do exercício anterior determine a solução que obedece à seguinte condição inicial.

a) $y(1) = 2$

b) $y(\pi) = 2$

c) $y(0) = -2$

d) $x(\pi) = \pi^{1/3}$

e) $y(0) = 3$

f) $y(0) = 1$

19.4. Um depósito contem 100 litros de salmoura cuja concentração no instante $t = 0$ minutos é de 2.5 gramas de sal por litro. Uma salmoura contendo 2 gramas de sal por litro é lançada no tanque à velocidade de 5 litros por minuto, e a mistura (tornada uniforme por agitação) corre do tanque na mesma porporção. Designamos por $q(t)$ a quantidade de sal dissolvido no tanque no instante t.

a) Qual a quantidade inicial, $q(0)$, de sal no depósito?
b) Quantos gramas de sal por minuto entram no tanque? Observe que esta velocidade é constante.

c) Quantos gramas de sal por minuto saiem do tanque? Observe que esta velocidade depende da quantidade de sal no tanque $q(t)$ em cada instante t.

d) Escreva a derivada $\dfrac{dq}{dt}$ em função das velocidades das duas alíneas anteriores.

e) Resolva a equação diferencial obtida na alínea anterior para ver quantos gramas de sal existem no depósito em cada instante t.

f) Qual a quantidade de sal no depósito ao fim de uma hora?

19.5. No estudo do crescimento de uma população é costume utilizarem-se variaveis contínuas em vez da simples contagem do número de indivíduos. Uma variavel real x pode por exemplo medir a densidade da população (nº de indivíduos por unidade de área), ou então medir a massa total da população (em gramas ou kilogramas), ou pode ainda medir o número de milhares de indivíduos dessa mesma população. Considere uma função $x = x(t)$ que descreva a evolução da população ao longo do tempo t. A derivada $x'(t)$ mede a velocidade (instantânea) de crescimento da população, i.e. o "número" de novos indivíduos por unidade de tempo. Ao cociente $x'(t)/x(t)$ é costume chamar-se a *taxa de crescimento* da população. Serve para medir a contribuição média de cada indivíduo, por unidade de tempo, para o crescimento da população. As leis de crescimento de populações postulam como varia a taxa de crescimento da população em função do próprio tamanho, $x(t)$, da população. Cada lei de crescimento vem expressa na forma de uma equação diferencial. Para cada uma das duas leis de crescimento seguintes:

I. A *lei de crescimento exponencial*, que postula uma taxa de crescimento constante $a > 0$, i.e. independente do tamanho x da população,

II. A *lei de crescimento logística*, que postula uma taxa de crescimento que decresce linearmente com o tamanho x da população, i.e. da forma $a - b\,x$, com $a > 0$ e $b > 0$ (o coeficiente a mede a taxa de crescimento quando a população é muito pequena; por sua vez o termo $-b\,x$ mede o efeito negativo de competição entre indivíduos que vai aumentando com o tamanho da população),

a) Escreva a equação diferencial correspondente,

b) Resolva-a sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$,

c) Descreva o comportamento assintótico da solução, i.e. quando $t \to +\infty$. Este comportamento depende do tamanho inicial da população, $x(0) = x_0$?

19.6. A lei de arrefecimento de Newton diz que: *a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura do corpo* *e da temperatura média ambiente.* Cada corpo tem a sua constante de proporcionalidade $k > 0$ específica. Seja Q uma variavel com o valor da temperatura de um corpo num meio ambiente mantido à temperatura constante A. A evolução da temperatura desse corpo ao longo do tempo será então descrita por uma função $Q = Q(t)$ da variavel tempo t.

a) Escreva a equação diferencial em $Q(t)$ que traduz a lei de arrefecimento de Newton.
b) Ache a solução $Q(t)$ desta equação sujeita à condição inicial $Q(0) = Q_0$.
c) Um corpo é colocado num quarto aquecido a uma temperatura constante de 30^oF. Depois de 10 minutos, a temperatura do corpo é de 0^oF, e ao fim de 20 minutos a temperatura do corpo é de 15^oF. Qual a temperatura inicial do corpo?
d) Uma barra de metal a uma temperatura inicial de 20^oC é colocada num recipiente com água a ferver (100^oC). A água continua a ferver e 20 segundos mais tarde a temperatura da barra é de 30^oC. Qual a temperatura da barra no final do primeiro minuto. Quanto tempo demorará até a barra atingir os 98^oC?

19.7. A variavel $0 \leq x \leq 1$ representa a proporção de indivíduos infectados com uma determinada doença contagiosa numa certa comunidade, enquanto $y = 1 - x$ representa a proporção de indivíduos saudáveis, mas susceptíveis à doença, na mesma comunidade. Supondo que os indivíduos se movem livremente o número de contactos entre indivíduos infectados e saudáveis, suscetíveis de provocar o contágio da doença, é proporcional ao produto $x\,y = x\,(1-x)$. Queremos analisar a evolução da proporção $x = x(t)$ ao longo do tempo. A derivada $x'(t)$ mede a taxa de contágio, i.e. a proporção de novos indivíduos infectados por unidade de tempo.

a) Traduza numa equação diferencial a lei epidemiológica que postula ser a taxa de contágio proporcional ao número de contactos entre indivíduos infectados e saudáveis. Cada doença tem a sua constante de proporcionalidade (que é positiva) específica, característica do seu grau de infeciosidade.
b) Ache a solução $x(t)$ desta equação sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$ com $0 < x_0 < 1$, i.e. determine a proporção de indivíduos doentes no instante t, supondo que no instante $t = 0$ a proporção de indivíduos doentes é x_0.
c) Calcule
$$\lim_{t \to +\infty} x(t)\ .$$
Interprete este resultado.