Exercícios de Análise Infinitesimal I

17.1. Calcule a derivada das seguintes funções, definidas em $\mathbb{R}$ ou em $]0,+\infty[$;

a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} e^t\,dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^0 \sin t\,dt$ d) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \log t\,dt$

e) $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^x \cos(t^2)\,dt$

17.2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0)=0$ e $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$. Representando por g a função inversa de f, defina-se:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} g(t)\,dt - xf(x).$$

a) Calcule a derivada de F.

b) Qual o valor de $F(x)$? Interprete este resultado geometricamente.

17.3. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(a+b-x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

a) Qual o significado geometrico da relação acima?

b) Veja qua a função

$$g(x) = x\,f(x) - \frac{a+b}{2}\,f(x)$$

satisfaz $g(a+b-x) = -g(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

c) Qual o significado geometrico desta nova relação?

d) Prove que

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

17.4. Verifique as seguintes relações, onde $n,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \pi$ ou 0 resp. conforme $n=k$ ou $n\neq k$.

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \pi$ ou 0 resp. conforme $n=k$ ou $n\neq k$.

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,dx = 0$ para todo n, k.

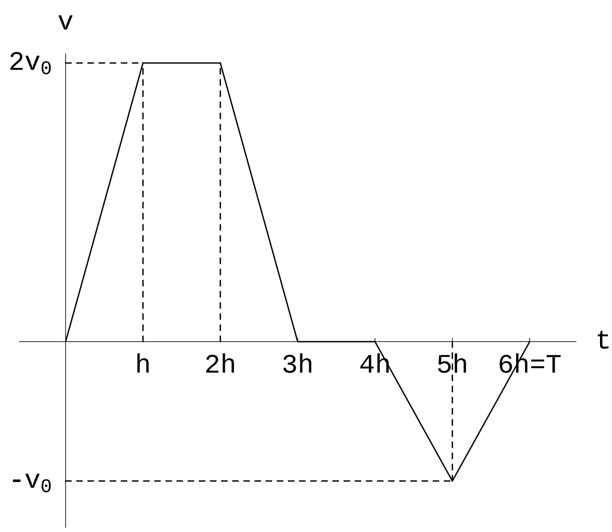
Sugestão: Use as seguintes indentidades trignométricas:

$$\cos x\,\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$$

$$\sin x\,\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)$$

$$\sin x\,\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$$

17.5. Um objecto move-se ao longo de um eixo de coordenadas x. O seu movimento é descrito por uma função $x = x(t)$ no intervalo de tempo $[0, T]$. Sabendo que a posição no instante inicial é $x(0) = 0$ e que a lei das velocidades deste movimento é descrita pelo seguinte gráfico:

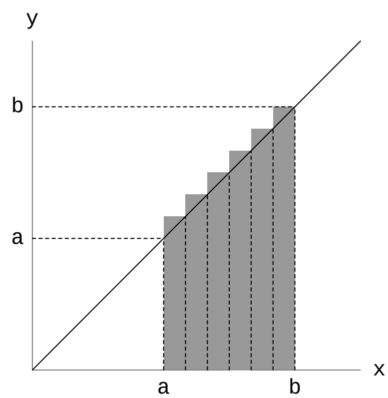


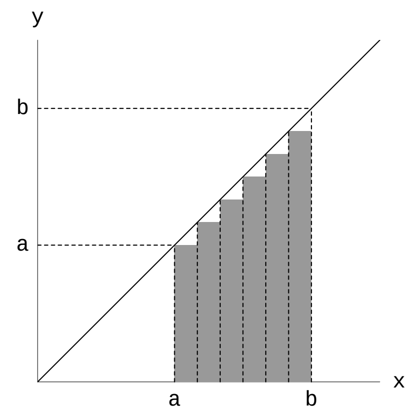
determine:

a) os intervalos de tempo onde o objecto está respectivamente: parado, em movimento uniforme, em movimento acelerado e em movimento desacelerado;
b) os deslocamentos efectuados nestes intervalos de tempo;
c) as distâncias percorridas nos mesmos intervalos de tempo;
d) a posição no instante final $t = T$ e o deslocamento total;
e) a lei do movimento $x(t)$. Esboce o seu gráfico.

17.6. Considere a sequência de pontos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ no intervalo $[a, b]$, onde $x_i = a + i\,(b-a)/n$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. As somas superior e inferior da função $f(x) = x$ neste intervalo são

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{e} \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \left(\frac{b-a}{n}\right) .$$





Mostre que

a) $S_n = (b-a)\left(a + (b-a)\,\dfrac{n+1}{2\,n}\right)$.

b) $s_n = (b-a)\left(a + (b-a)\,\dfrac{n-1}{2\,n}\right)$.

c) ambas estas sucessões convergem para $(b^2 - a^2)/2$.

d) conclua que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.