Exercícios de Análise Infinitesimal I

12.1. Calcule os seguintes limites.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}, a, b > 0$

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\log x)}{\log(1-x)}$

c) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

h) $\lim_{x\to +\infty} (x^6 + 3x^5)^{\frac{1}{3}} - x(1+x)$

i) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$

j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{\frac{\log x}{x}} - 1}$

12.2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$f(x) = e^{-x} (\cos x - 2 \sin x)$ e $g(x) = e^{-2x} (\sin x - \cos x)$.

a) Mostre que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$.

b) Mostre que não existe $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
Sugestão: Considere as sucessões $x_n = 2n\pi$ e $y_n = \alpha + 2n\pi$, onde $\tan \alpha = 1/2$.

c) Mostre que existe $\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

d) Isto contradiz a Regra de Cauchy dos limites?

12.3. Qual o erro efectuado no cálculo do seguinte limite, usando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

(O limite inicial é -4).

12.4. Determine $f'(0)$ sendo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciavel, com segunda derivada, g'', contínua, satisfazendo $g(0) = g'(0) = 0$ e $g''(0) = 17$.