Exercícios de Análise Infinitesimal I

10.1. Considere a função

$$f(x) = (x^2 - 4)\, x$$

e determine, justificando:

a) um intervalo onde a função satisfaça as condições do teorema de Rolle.

b) o(s) ponto(s) do referido intervalo que verificam a tese do Teorema de Rolle.

10.2. Prove que f satisfaz as condições do teorema de Rolle e indique no intervalo dado os números c tais que $f'(c) = 0$.

a) $f(x) = x^3 - x; \qquad [0, 1].$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8; \qquad [-2, 2].$

c) $f(x) = \sin x; \qquad [0, 2\pi].$

10.3. a) Aplicando o Teorema de Rolle demonstre que a equação

$$x^3 - 3x + b = 0$$

não pode ter mais do que uma solução no intervalo $[-1, 1]$ qualquer que seja o valor de b.

b) Indique para que valores de b, existe exactamente uma solução da equação em $[-1, 1]$.

10.4. Prove que $x^2 = x \sin x + \cos x$ tem apenas duas soluções reais.

10.5. a) Prove que a equação $4x^3 + 6x = 1$ não tem zeros em $]-1, 0[$.

b) Prove que a equação $x^4 + 3x^2 - x = 2$ tem um único zero em $]-1, 0[$.

10.6. Seja $f(x)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que, $f(2) = -f(4) = 1$. Considere a função $g(x) = xf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Prove que a equação $g'(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz positiva.

b) Prove que existe $x \in]0, 2[$ tal que $g'(x) = 1$.

10.7. Prove que f satisfaz as condições do teorema do valor médio e indique no intervalo dado os números c que satisfazem a conclusão do teorema.

a) $f(x) = x^2; \qquad [1, 2].$

b) $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x; \qquad [1, 4].$

c) $f(x) = x^3; \qquad [0, 8].$

10.8. Prove que na parábola

$$y = Ax^2 + Bx + C\,, \quad \text{com} \quad A \neq 0 \quad \text{e} \quad A, B, C \in \mathbb{R}\,,$$

a corda que une os pontos de abcissas $x = a$ e $x = b$ é paralela à tangente no ponto de abcissa $x = \frac{a+b}{2}$, quaisquer que sejam a, $b \in \mathbb{R}$.

10.9. Aplicando o Teorema do valor médio prove que:

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.

c) $\dfrac{x-a}{x} < \log \dfrac{x}{a} < \dfrac{x-a}{a}$, $0 < a < x$.

d) $\tan x > x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

10.10. Verifique as desigualdades, estudando o sinal da derivada de uma função adequada:

a) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $\quad x > 0$.

b) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x$, $\quad x > 0$.

c) $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x$, $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

d) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, $\quad x > 0$.

10.11. Existe alguma função diferenciável f que satisfaça as seguintes condições, $f(0) = 2$, $f(2) = 5$ e $f'(x) \leq 1$ no intervalo $]0, 2[$? Justifique.

10.12. Existe alguma função diferenciável f tal que:

$$f(x) = 1 \iff x = 0, 2, 3$$

$$\text{e} \quad f'(x) = 0 \iff x = -1,\ 3/4,\ 3/2\ ?$$

Justifique.

10.13. Considere a função $f(x)$ tal que $|f'(x)| \leq k$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Prove que,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{para todo o } x, y \in \mathbb{R}.$$

10.14. Seja f uma função diferenciável em $]a, b[$ e contínua em $[a, b]$.

a) Prove que se existe uma constante M tal que, $f'(x) \leq M$ para todo $x \in]a, b[$, então:

$$f(b) \leq f(a) + M(b - a).$$

b) Prove que se existe uma constante m tal que, $f'(x) \geq m$, para todo o $x \in]a, b[$ então:

$$f(b) \geq f(a) + m(b-a).$$

c) De acordo com as alíneas anteriores se existe uma constante L tal que, $|f'(x)| \leq L$, para todo o $x \in]a, b[$ então:

$$f(a) - L(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + L(b-a).$$