NÚMEROS RACIONAIS

$$\mathbb{Q} = \left\{ \ \frac{a}{b} \ : \quad a,\, b \in \mathbb{Z} \ , \quad b \neq 0 \ \right\}$$

Identidade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad a\,d = b\,c$$

Operações:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$$

Propriedades:

(a) $x + (y + z) = (x + y) + x$

(b) $x + y = y + x$

(c) $x + 0 = 0 + x = x$

(d) Dado x existe um número $-x$, dito o simétrico de x, tal que
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x.$$

(e) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot x$

(f) $x \cdot y = y \cdot x$

(g) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

(h) Dado $x \neq 0$, existe um número x^{-1}, dito o inverso de x, tal que
$$x \cdot (x^{-1}) = 1 = (x^{-1}) \cdot x.$$

(i) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

(j) $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

(k) $x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0 \quad \Longrightarrow \quad x + y > 0 \quad \text{e} \quad x \cdot y > 0$

(l) Dado x vale uma, e apenas uma, das seguintes alternativas

$$x = 0 \qquad x > 0 \qquad -x > 0\ .$$

(m) $x < y \quad \text{e} \quad y < z \quad \Longrightarrow \quad x < z$

(n) $x < y \quad \text{e} \quad z > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot z < y \cdot z$

(o) $x < y \quad \Longrightarrow \quad x + z < y + z$

(p) Dados x e y vale uma, e apenas uma, das seguintes alternativas

$$x = y \qquad x < y \qquad y < x\ .$$

Um conjunto munido de duas operações, $+$ e $\cdot$, e uma relação de ordem, $<$, satisfazendo as propriedades acima diz-se um *corpo ordenado* . O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações de adição e multiplicação e a relação de ordem usual é portanto um corpo ordenado. Na definição de corpo ordenado é habitual tomar-se como primitivo o conceito de *positividade* no lugar da noção de ordem $<$. As propriedades (k) e (l) descrevem a compatibilidade entre as operações aritméticas e este conceito. Definindo a ordem, '$<$', à custa da noção positividade, '> 0',

$$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x > 0\ .$$

as propriedades (m)-(p) são consequências lógicas das anteriores. Verifique-o. Veja que todo o corpo ordenado contem $\mathbb{N}$, e portanto também contem $\mathbb{Q}$.

REPRESENTAÇÂO DECIMAL DE NÚMEROS RACIONAIS

A representação decimal de um número racional (fraccionário) p/q é obtida recorrendo ao algorítmo da divisão. Em certos casos a divisão termina com resto 0 ao fim de um número finito de passos, fornecendo uma representação finita e exacta para o número p/q. Por exemplo $19/16 = 1.1875$.

$$\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 9. & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & & & \\
\hline
 & 3 & 0 & & & & 1. & 1 & 8 & 7 & 5 \\
 & 1 & 4 & 0 & & & & & & & \\
 & & 1 & 2 & 0 & & & & & & \\
 & & & & 8 & 0 & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & &
\end{array}$$

A sequência de algarismos da parte decimal de um número diz-se a sua *dízima*. O número 19/16 tem dízima finita 1875.

Na generalidade dos casos, porém, a divisão de dois inteiros p e q arrasta-se indefinidamente sem nunca se obter um resto igual a 0. Nestes casos uma representação decimal exacta para o número p/q só é possivel se considerarmos dízimas infinitas como o resultado limite de uma divisão continuada indefinidamente. É este o caso quando dividimos 349 por 11.

$$
\begin{array}{cccccccc|ccccccc}
3 & 4 & 9. & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & & & & & \\
\hline
 & 1 & 9 & & & & & & 3. & 1 & 7 & 2 & 7 & 2 & \cdots \\
 & & 8 & 0 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & & 3 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & & & &
\end{array}
$$

Repare que a cada passo da divisão o resto é sempre menor que o divisor. Assim o número de restos que podem ocorrer durante o processo de divisão é finito. Esse número nunca pode exceder o próprio divisor. Significa isto que se uma divisão de dois inteiros se prolonga idefinidamente haverá necessáriamente uma repetição de restos, que forçará o processo de divisão a assumir um padrão repetitivo e periódico de cálculo. Assim os dígitos da dízima obtida repetir-se-ão periodicamente de certa casa decimal em diante. No exemplo anterior a sequência de dois dígitos '72' repete-se periodicamente a partir da segunda casa decimal. Não é dificil obter a seguinte caracterização.

Todo o número racional p/q admite uma dízima finita, ou então infinita e periódica de certa ordem (casa decimal) em diante. Reciprocamente, toda a dízima nestas condições pode ser realizada como um quociente p/q de dois inteiros.

Por exemplo para representar $x = 0.(125) = 0.125125\cdots$ como um número fraccionário basta observar que

$$999\,x = 1000\,x - x = 125.125125\cdots - 0.125125\cdots = 125\ .$$

Logo $x = 125/999$.