PRINCÍPIO DO SUPREMO

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que:

- $M \in \mathbb{R}$ é um *majorante* de $A \iff$ para todo o $a \in A$, $a \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ é um *minorante* de $A \iff$ para todo o $a \in A$, $m \leq a$.
- A é *majorando*, ou *limitado superiormente* $\iff A$ tiver algum majorante.
- A é *minorando*, ou *limitado inferiormente* $\iff A$ tiver algum minorante.
- A é *limitado* $\iff A$ fôr majorado e minorado.
- $M \in \mathbb{R}$ é *máximo* de $A \iff M \in A$ e M é majorante de A.
- $m \in \mathbb{R}$ é *mínimo* de $A \iff m \in A$ e m é minorante de A.
- $M \in \mathbb{R}$ é *supremo* de $A \iff M$ é um majorante de A, menor ou igual a qualquer outro majorante de A.
- $m \in \mathbb{R}$ é *ínfimo* de $A \iff m$ é um minorante de A, maior ou igual a qualquer outro minorante de A.

Quando existem são únicos o máximo, o mínimo, o supremo e o ínfimo de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Designam-se respectivamente por $\max A$, $\min A$, $\sup A$ e $\inf A$.

Exemplos

A	$\{1/n :\ n \in \mathbb{N}\}$	$]0,1[$	$\mathbb{N}$
majorantes	$[1,+\infty[$	$[1,+\infty[$	$\emptyset$
minorantes	$]-\infty,0]$	$]-\infty,0]$	$]-\infty,0]$
máximo	1	$\nexists$	$\nexists$
mínimo	$\nexists$	$\nexists$	0
supremo	1	1	$\nexists$
ínfimo	0	0	0

Caracterizações do supremo e ínfimo de um conjunto

Dado um conjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{R}$, $\quad M = \sup A \quad \Longleftrightarrow$

S1) $\forall\, a \in A,\;\; a \leq M.$

S2) $\forall\, a \in A,\;\; a \leq M' \quad \Longrightarrow \quad M \leq M'.$

[M é um majorante de A menor ou igual a qualquer outro majorante de A.]

$$\Updownarrow$$

S1) $\forall\, a \in A,\;\; a \leq M.$

S2') $\forall\, \epsilon > 0,$ existe $a \in A$ tal que $\quad M - \epsilon < a.$

[M é um majorante de A, e para todo o $\epsilon > 0$, $M - \epsilon$ já não é majorante de A.]

Dado um conjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{R}$, $\quad m = \inf A \quad \Longleftrightarrow$

I1) $\forall\, a \in A,\;\; m \leq a.$

I2) $\forall\, a \in A,\;\; m' \leq a \quad \Longrightarrow \quad m' \leq m.$

[m é um minorante de A maior ou igual a qualquer outro minorante de A.]

$$\Updownarrow$$

I1) $\forall\, a \in A,\;\; m \leq a.$

I2') $\forall\, \epsilon > 0,$ existe $a \in A$ tal que $\quad a < m + \epsilon.$

[m é um minorante de A, e para todo o $\epsilon > 0$, $m + \epsilon$ já não é minorante de A.]

Princípio do Supremo
Todo o conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e majorado, resp. minorado, tem um supremo, resp. um ínfimo.

Demonstração : P. Arquimediano + P. Encaixe $\Rightarrow$ P. Supremo
Dado um intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$ designemos por $M_0(I) = [a, \frac{a+b}{2}]$ e $M_1(I) = [\frac{a+b}{2}, b]$ as duas metades iguais em que o intervalo I se subdivide. Observemos que se um intervalo fechado e limitado I satisfaz as seguintes propriedades:

- $A \cap I \neq \varnothing$,
- $\max I$ é um majorante de A.

então pelo menos uma das suas metades $J = M_0(I)$, ou $J = M_1(I)$ satisfaz exactamente as mesmas duas propriedades: Se o ponto médio fôr majorante de A então $J = M_0(I)$ satisfaz. Caso contrário, A intersecta $J = M_1(I)$ e esta metade satisfaz as duas propriedades acima.

Como A é majorado, pelo Princípio Arquimediano, todo o inteiro $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande é um majorante de A. Seja

$$c = \min\{\, n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ é majorante de } A \,\} \,.$$

Então o intervalo fechado $I_0 = [c-1, c]$ satisfaz as propriedades referidas. Pela observação acima, pelo menos uma das metades em que se subdivide o intervalo I_0 satisfaz as duas propriedades mencionadas. Designemos por I_1 essa metade. Prosseguindo encontramos I_2 metade de I_1 tal que $A \cap I_2 \neq \varnothing$, sendo A majorado pelo máximo de I_2, e assim por diante. Mais precisamente podemos definir recursivamente,

$$I_{n+1} = \begin{cases} M_0(I_n) & \text{se } A \cap M_1(I_n) = \varnothing \\ M_1(I_n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Facilmente se prova por indução que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $A \cap I_n \neq \varnothing$, sendo A majorado por $\max I_n$, e que I_n tem comprimento $|I_n| = \frac{1}{2^n}\,|I_0|$. Pelo Princípio de Encaixe existe um único ponto c que pertence a todos os intervalos I_n. Facilmente se prova agora que c é o supremo de A. $\square$

Pode-se provar que qualquer corpo ordenado que satisfaça o Princípio do Supremo verifica também os Princípios Arquimediano e do Encaixe. Por outras palavras o Princípio do Supremo chega para caracterizar corpo ordenado completo.

Teorema da Sucessão Monótona
Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Demonstração
Seja $\{x_n\}$ sucessão monótona crescente e majorada, i.e. $x_n \leq x_{n+1} \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Então o conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ é majorado por M. Seja $x = \sup A$ o supremo de A, que existe pelo Princípio do Supremo. Dado $\epsilon > 0$, $x - \epsilon$ não é majorante de A. Logo, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_p \in A$ não seja majorado por $x - \epsilon$, i.e. $x - \epsilon < x_p \leq x$. Como $\{x_n\}$ cresce temos para $n \geq p$,

$$x - \epsilon < x_p \leq x_n \leq x \quad \Longrightarrow \quad |x_n - x| \leq \epsilon \ .$$

Isto prova que $\{x_n\}$ converge para x. $\square$