PRINCÍPIO DE COMPACIDADE

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação de* A

$$\Updownarrow$$

$\forall\, \epsilon > 0, \quad]a-\epsilon, a+\epsilon[$ contem pelo menos um ponto de A, distinto de a

$$\Updownarrow$$

$\forall\, \epsilon > 0, \;]a-\epsilon, a+\epsilon[$ contem um número infinito de pontos de A

Chama-se *derivado de* A ao conjunto A' dos pontos de acumulação de A.

Exemplos

A	$\{1/n:\ n \in \mathbb{N}\}$	$]0,1[$	$\mathbb{Q}$
A'	$\{0\}$	$[0,1]$	$\mathbb{R}$

Teorema de Bolzano-Weierstrass I
Todo o conjunto infinito e limitado $A \subseteq \mathbb{R}$ *contem pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração
Dado um intervalo fechado e limitado $I = [a,b]$ designemos por $M_0(I) = [a, \frac{a+b}{2}]$ e $M_1(I) = [\frac{a+b}{2}, b]$ as duas metades iguais em que o intervalo I se subdivide. Observemos que se $A \cap I$ fôr infinito então pelo menos uma das duas intersecções $A \cap M_0(I)$ e $A \cap M_1(I)$ será infinita. Se fossem ambas finitas teriamos $A \cap I = (A \cap M_0(I)) \cup (A \cap M_1(I))$ finito.

Como A é um conjunto infinito e limitado podemos escolher um intervalo fechado e limitado I_0 contendo A. Logo $A \cap I_0 = A$ será infinito. Pela observação acima, pelo menos uma das metades em que se subdivide o intervalo I_0 terá uma intersecção infinita com A. Designemos por I_1 essa metade. Prosseguindo encontramos I_2 metade de I_1 tal que $A \cap I_2$ seja infinito, e assim por diante. Mais precisamente podemos definir recursivamente,

$$I_{n+1} = \begin{cases} M_0(I_n) & \text{se } A \cap M_0(I_n) \text{ fôr infinito} \\ M_1(I_n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Facilmente se prova por indução que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $A \cap I_n$ é infinito e que I_n tem comprimento $|I_n| = \frac{1}{2^n}|I_0|$. Pelo Princípio de Encaixe existe um único ponto c que pertence a todos os intervalos I_n. Temos que c é ponto de acumulação de A porque qualquer vizinhança $]c-\epsilon, c+\epsilon[$ de c contem todos os intervalos I_n com ordens suficientemente grandes. $\square$

Dada uma sucessão estritamente crescente de números inteiros $\{k_n\}$,

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$$

e uma sucessão de números reais $\{x_n\}$, a sucessão $\{x_{k_n}\}$

$$x_{k_1},\ x_{k_2},\ x_{k_3},\ \cdots\ x_{k_n},\ \cdots$$

diz-se uma *subsucessão* de $\{x_n\}$.

$$\begin{array}{llllllll}
\{x_{2\,n}\} & x_2 & x_4 & x_6 & x_8 & \cdots & x_{2\,n} & \cdots \\
\{x_{2\,n-1}\} & x_1 & x_3 & x_5 & x_7 & \cdots & x_{2\,n-1} & \cdots \\
\{x_{(n+1)!}\} & x_2 & x_6 & x_{24} & x_{120} & \cdots & x_{(n+1)!} & \cdots \\
\{x_{2^n}\} & x_2 & x_4 & x_8 & x_{16} & \cdots & x_{2^n} & \cdots
\end{array}$$

são exemplos de subsucessões de $\{x_n\}$.

Chama-se *sublimite* de $\{x_n\}$ a qualquer limite de uma subsucessão convergente de $\{x_n\}$.

Proposição *x é sublimite de $\{x_n\}$*

$$\Updownarrow$$

$\{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$ é infinito ou x é ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Demonstração

Se $\{ n \in \mathbb{N} : x_n = x \}$ é infinito, sendo

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$$

uma ordenação dos elementos deste conjunto, a subsucessão $\{x_{k_n}\}$ é constante igual a x. Logo a subsucessão converge para x, o que mostra que x é um sublimite de $\{x_n\}$.

Se x fôr ponto de acumulação de $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$, seja

$$k_1 = \min\{ i \in \mathbb{N} : x_i \in]x-1, x+1[\ \} .$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ a vizinhança $]x - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}[$ contem uma infinidade de termos x_i podemos definir recursivamente

$$k_{n+1} = \min\left\{ i > k_n : x_i \in \left]x - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right[\ \right\}$$

Logo, por definição k_n é estritamente crescente e

$$x_{k_n} \in \left]x - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[\quad \Longleftrightarrow \quad |x - x_{k_n}| < \frac{1}{n} ,$$

o que mostra que $x = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$ é sublimite de $\{x_n\}$.

Se x é um sublimite de $\{x_n\}$ existe uma subsucessão $\{x_{k_n}\}$ convergente para x. Se o conjunto dos termos desta subsucessão $\{ x_{k_n} : n \in \mathbb{N} \}$ fôr infinito então x é ponto de acumulação deste conjunto, e portanto também é ponto de acumulação do conjunto maior $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$. Caso contrário, se $\{ x_{k_n} : n \in \mathbb{N} \}$ fôr finito, teremos $x_{k_n} = x$ para todo o n suficientemente grande. Logo $\{n \in \mathbb{N} : x_n = x \}$ é infinito porque contem todas as ordens k_n com n suficientemente grande. $\square$

Teorema de Bolzano-Weierstrass II

Toda a sucessão limitada de números reais admite pelo menos um sublimite.

Demonstração

Seja $\{x_n\}$ uma sucessão limitada. Então $A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ é um conjunto limitado. Se A fôr finito então algum dos termos x_p da sucessão repete-se infinitas vezes. Neste caso $\{n \in \mathbb{N} : x_n = x_p \}$ é infinito, e pela proposição anterior $x = x_p$ é sublimite de $\{x_n\}$. Caso contrário A é infinito. Neste segundo caso pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass-I A tem um ponto de acumulação x, que pela proposição anterior é sublimite de $\{x_n\}$. $\square$

Exemplos:

1. $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \cdots\}$

    - Conjunto dos termos $A = \{\, x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\,\} = \{1, 2, 3\,\}$.
    - Pontos de acumulação de A, $A' = \varnothing$.
    - Termos que se repetem infinitas vezes: Todos.
    - Sublimites: $\{1, 2, 3\,\}$.

2. $\{x_n\} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

    - Conjunto dos termos $A = \{\, x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\,\} = \mathbb{N}$.
    - Pontos de acumulação de A, $A' = \varnothing$.
    - Termos que se repetem infinitas vezes: Todos.
    - Sublimites: $\mathbb{N}$.

3. $\{x_n\} = \left\{\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \cdots\right\}$

    - Conjunto dos termos $A = \{\, x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\,\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
    - Pontos de acumulação de A, $A' = [0, 1]$.
    - Termos que se repetem infinitas vezes: Todos.
    - Sublimites: $[0, 1]$.

4. $\{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, 1, \cdots\right\}$

    - Conjunto dos termos $A = \{\, x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\,\} = \{\, 1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\,\}$.
    - Pontos de acumulação de A, $A' = \{0\}$.
    - Termos que se repetem infinitas vezes: 1.
    - Sublimites: $\{0\} \cup \{\, 1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\,\}$.