CORPO ORDENADO COMPLETO

Os números reais podem ser caracterizados axiomaticamente como formando um corpo ordenado completo no sentido da definição que segue. Chama-se *corpo ordenado completo* a qualquer corpo ordenado que satisfaça os dois princípios seguintes:

Princípio Arquimediano
Dados números reais $x, y \in \mathbb{R}$*, se* $x > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n\,x > y$*.*

Princípio do Encaixe
Dada uma sucessão de intervalos fechados encaixados

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots$$

com $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$*, existe um único elemento que é comum a todos os intervalos* $[a_n, b_n]$*.*

Veja que num corpo ordenado, o princípio Arquimediano é equivalente a qualquer uma das seguintes afirmações:

A1) Qualquer que seja o número x existe um inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

A2) A sucessão $\{\frac{1}{n}\}$ converge para 0, i.e. qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq p$, $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

Há inúmeras construções de corpos ordenados completos, sendo mais conhecidas a construção dos *cortes de Dedekind*[1] e a construção das *sucessões de Cauchy*[2]. Quaisquer dois corpos ordenados completos são sempre univocamente isomorfos, no sentido que existe um único isomorfismo entre eles. Faça a demosntração deste facto.

Por esta razão, qualquer corpo ordenado completo será visto como *o corpo dos números reais*, e designado por $\mathbb{R}$, sendo indiferente a natureza específica dos objectos a que chamamos números reais.

---

[1] Chama-se corte de Dedekind a uma partição (A, B) de $\mathbb{Q}$ em duas metades, A e B, de modo que todo o elemento de A seja um minorante de B, e, reciprocamente, todo o elemento de B seja um majorante de A. Um corte de Dedkind (A, B) representa o único número x que é simultâneamente um majorante de A e um minorante de B.

[2] Nesta construção de um corpo ordenado completo, os números reais são vistos como classes (de equivalência) de sucessões de Cauchy, todas convergindo para o número que representam