# LEI DO ARREFECIMENTO DE NEWTON

Seja $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ a função que descreve a evolução da temperatura $x = x(t)$ de um corpo ao longo do tempo $t$, durante um certo intervalo de tempo $[0, T]$. A *lei de arrefecimento de Newton* postula que a velocidade de arrefecimento $x'(t)$ é proporcional à diferença entre a temperatura do meio ambiente $k = k(t)$ e a temperatura do corpo $x = x(t)$. Ela pode ser sintetizada na seguinte equação diferencial,

$$x' = c\,(k(t) - x)\ ,$$

onde $c$ é uma constante positiva cujo valor depende das características físicas do corpo em causa.

## Solução do Problema

Sendo $x_0$ a temperatura do corpo no instante $t = 0$, a função $x(t)$, que satisfaz o problema

$$x' = c\ (k(t) - x)\ \ , \quad x(0) = x_0\,, \tag{1}$$

é dada explicitamente por

$$x(t) = \left( x_0 + \int_0^t c\, e^{c\,s}\, k(s)\, ds \right)\, e^{-c\,t}\ . \tag{2}$$

No caso de a temperatura ambiente $k(t)$ ser constante igual a $k$,

$$x(t) = k + (x_0 - k)\, e^{-c\,t}\ . \tag{3}$$

Para justificar a fórmula (2), observe que

$$\begin{aligned}
(e^{c\,t}\, x)' &= e^{c\,t}\, x' + c\, e^{c\,t}\, x \\
&= e^{c\,t}\, c\,(k(t) - x) + c\, e^{c\,t}\, x \\
&= c\, e^{c\,t}\, k(t)\ .
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
e^{c\,t}\, x(t) - x_0 &= \left[ e^{c\,t}\, x(t) \right]_0^t = \int_0^t (e^{c\,s}\, x)'\, ds \\
&= \int_0^t c\, e^{c\,s}\, k(s)\, ds\ ,
\end{aligned}$$

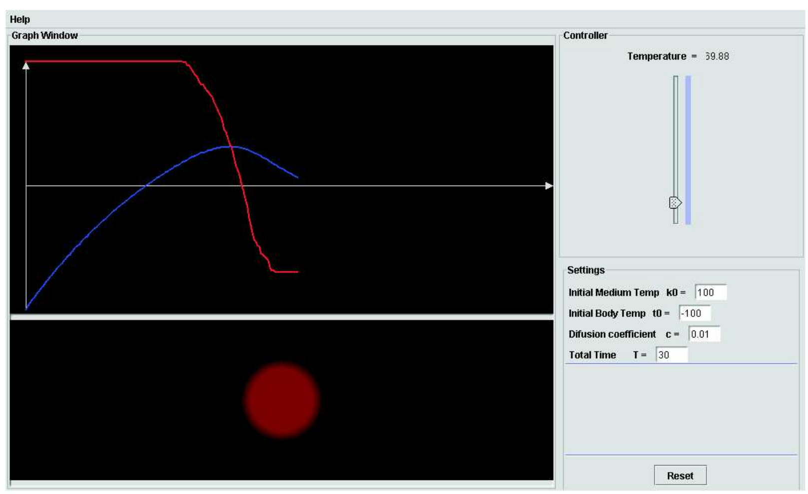
donde segue (2).

Para ver (3), observe que sendo $k(s) = k$ constante,

$$\int_0^t c\, e^{c\,s}\, k\, ds = [k\, e^{c\,s}]_0^t = k\,(e^{c\,t} - 1)\ .$$

### Aplicação

No applet seguinte pode controlar a temperatura $k(t)$ do meio ambiente (a vermelho), observando como a temperatura do objecto (a azul) a tenta acompanhar aproximando-se dela. A janela inferior mostra uma imagem térmica de um corpo circular, que apenas se torna visível quando a diferença de temperatura com o meio ambiente é significativa. A cor preta representa o frio, e a cor vermelha o quente.




Clique aqui para correr o applet!

## Discretização

Para calcularmos computacionalmente a solução (2), discretizando a equação diferencial (1), tomemos $h$ suficientemente pequeno de modo que a derivada $x'(t)$ esteja próxima da razão $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$. Substituindo $x'(t)$ por este quociente na equação diferencial (1) obtemos a equação recursiva:

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = c\,(k(t)-x(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad x(t+h) = x(t) + c\,h\,(k(t)-x(t))\ . \tag{4}$$

Para analisarmos a evolução das temperaturas ao longo de uma sucessão de intervalos de tempo iguais, com duração $\Delta t = h$, consideremos a temperatura do objecto $x_n = x(n\,h)$, e a temperatura do meio ambiente $k_n = k(n\,h)$, nos instantes $t = n\,h$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$. A sucessão $(x_n)$ correspondente a uma solução $x(t)$ de (4) satisfaz a seguinte equação recursiva

$$x_{n+1} = x_n + c\,h\,(k_n - x_n)\ . \tag{5}$$

O applet acima foi implementado usando esta equação com $h = 0,04$ segundos.